Nombres Complexes

1 Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré à coefficients réels

Théorème 1. *L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c trois réels et $a \neq 0$ admet :*

- *Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, deux solutions réelles distinctes* $\boxed{x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$ *et* $\boxed{x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$

  de plus $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$.
- *Si $\Delta = 0$, une solution réelle double* $\boxed{x_0 = \dfrac{-b}{2a}}$ *de plus* $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2}$.
- *Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, deux solutions complexes conjuguées* $\boxed{z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$ *et* $\boxed{z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$

  de plus $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - z_1)(x - z_2)}$.

Exercice 1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 - x + 1 = 0$.*

2 Écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Définition 1. *Soit θ un nombre réel, on lui associe le nombre complexe $z_\theta = \cos\theta + i\sin\theta$.*

Propriété 1. $z_\alpha z_\beta = z_{\alpha+\beta}$

Par analogie avec la fonction exponentielle, on utilise désormais la *notation d'Euler* $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$.

Propriété 2. *Formules d'Euler*

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad et \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Propriété 3. *Formule de Moivre*

$$\boxed{(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \qquad soit \qquad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

Exercice 2. *Montrer en utilisant les formules d'Euler que* $\cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x) + 1}{2}$.

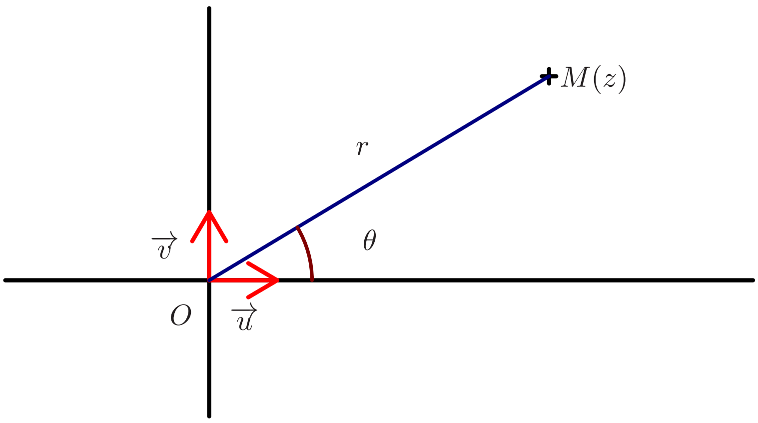
Exercice 3. *Montrer en utilisant la formule de Moivre que* $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ *et* $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$.

Théorème 2. *Tout nombre complexe* $\boxed{z = x + iy}$ *non nul peut s'écrire de manière unique sous la* forme trigonométrique $\boxed{z = re^{i\theta}}$ *avec r un réel strictement positif et θ un réel défini à 2π près. De plus on a :*

$$\boxed{r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

Le réel r est appelé module *du nombre complexe z et noté $|z|$, le réel θ est appelé* argument *du nombre complexe z et noté* $\arg(z)$*.*

Le couple (r, θ) représente les coordonnées polaires du point M d'affixe z dans le repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$:



Exercice 4. *On considère le nombre complexe $z = 1 + i$. Écrire z sous forme trigonométrique, en déduire la forme algébrique de z^{100}.*

Exercice 5. *On considère les nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$. Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique, en déduire les modules et arguments de $z_1 \times z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$.*

3 Écritures complexes de transformations du plan

Théorème 3. *Soient M et M' deux points du plan complexe d'affixes respectives z et z', alors :*

1. *Le point M' est l'image du point M par une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ si et seulement si :*

$$z' = z + z_{\overrightarrow{u}}$$

2. *Le point M' est l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle α si et seulement si :*

$$z' = e^{i\alpha} z$$

Exercice 6. *Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Déterminer l'écriture complexe de la translation de vecteur $2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$ ainsi que l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.*