Correction Bac Blanc - Série S - Lycée Robert Garnier 2008

Exercice I

1. **a.** L'exponentielle d'un réel étant strictement positive, le signe de f est donc celui de $-x$. La fonction f est donc strictement positive sur $]-\infty;0[$, nulle en 0 et strictement négative sur $]0;+\infty[$.

b. La fonction f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = -e^{2x+1} - 2xe^{2x+1} = -e^{2x+1}(2x+1)$. Le signe de f' est donc l'opposée de celui de $2x+1$. f est donc croissante sur $]-\infty;-\frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[-\frac{1}{2};+\infty[$.

c. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x+1} = +\infty$ par composition des limites sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$ donc par produit des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
$f(x) = \frac{e}{2} \times -2xe^{-(-2x)}$ or $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-X} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

d.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$			$\frac{1}{2}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				$-\infty$

2. **a.** La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse (-1) est $y = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x+1) = \frac{1}{e}x + \frac{2}{e}$.
La tangente à Γ au point d'abscisse (-1) est $y = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x+1) = \frac{1}{e}x + \frac{2}{e}$.

b.

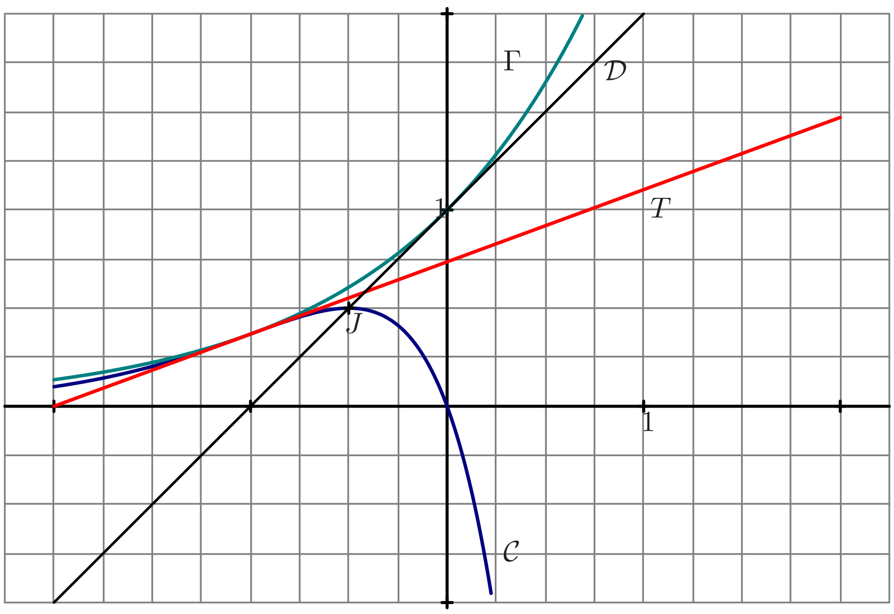
3. **a.** La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x , $h'(x) = (1+x)e^{x+1}$, h est donc décroissante sur $]-\infty;-1]$ et croissante sur $[-1;+\infty[$. De plus $h(-1) = 0$ donc $h(x) \geq 0$ pour tout réel x.

b. $g(x) - f(x) = e^{x}h(x)$ donc $g(x) \geq f(x)$ pour tout réel x et Γ est donc au-dessus de $\mathcal{C}$.

4. **a.** La tangente à Γ au point d'abscisse (-1) est $y = e^{m} + e^{m}(x-m) = e^{m}x + e^{m}(1-m)$.

b. Appelons $(x_A;0)$ les coordonnées de A et $(0;y_B)$ les coordonnées de B . On a : $x_A = m-1$ car $e^{m} \neq 0$ et $y_B = e^{m}(1-m)$ donc $J : (\frac{m-1}{2}; \frac{e^{m}(1-m)}{2})$.

c. Soit $J : (x_J;y_J)$. on remarque $y_J = f(x_J)$. En effet $f(\frac{m-1}{2}) = -\frac{m-1}{2}e^{m} = y_J$ donc J appartient à $\mathcal{C}$.



Exercice II

1. **a.** $u_1 = 4$; $u_2 = -\dfrac{1}{2}$; $u_3 = -\dfrac{8}{7}$.

b. Initialisation : $u_1 = 4 > -2$.

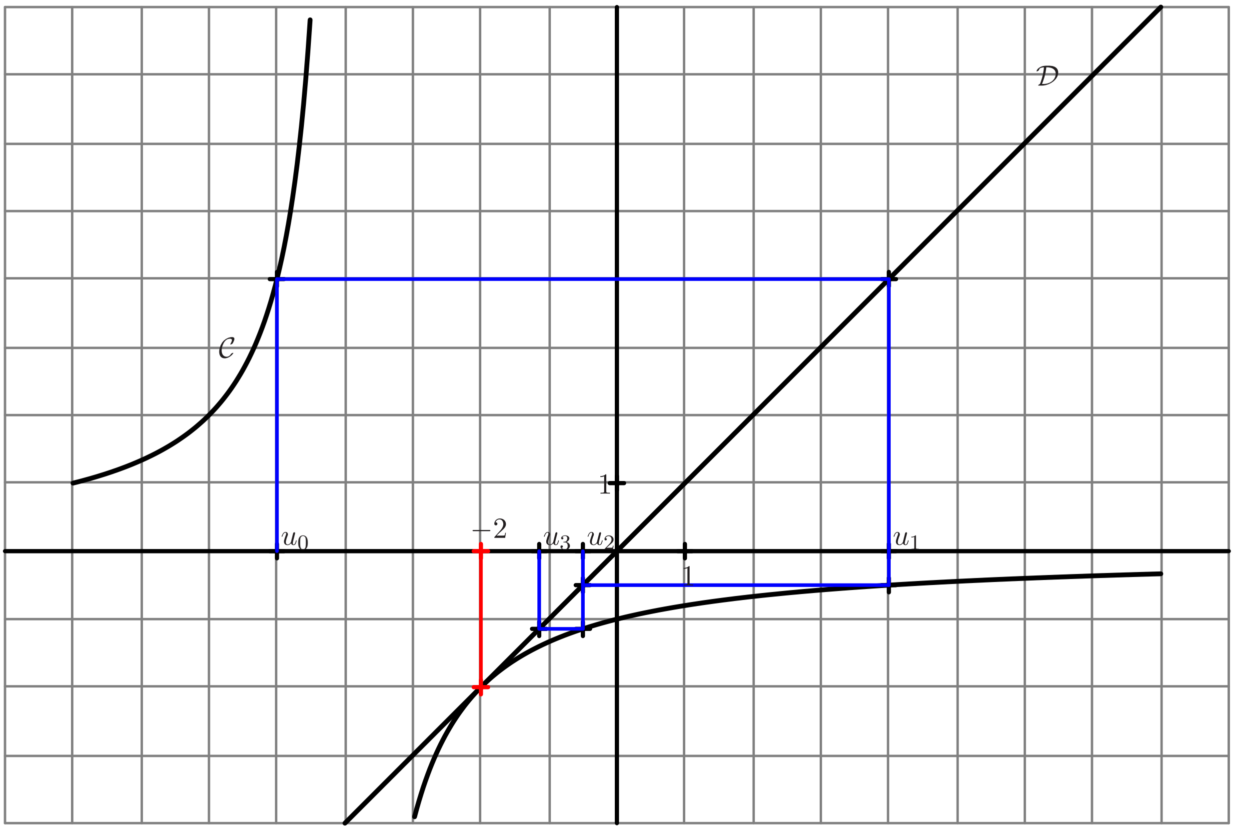
Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n : $u_n > -2$ et démontrons la au rang $n+1$: $u_{n+1} > -2$.

On a : $u_n > -2$ donc $u_n + 4 > 2$ donc $\dfrac{1}{u_n+4} < \dfrac{1}{2}$ (car la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$) donc $\dfrac{-4}{u_n+4} > \dfrac{-4}{2}$. Conclusion : $u_{n+1} > -2$.

L'hérédité est donc vérifiée, l'initialisation à $n = 1$ l'est aussi donc , pour tout entier naturel n non nul, $u_n > -2$.

c. D'après 1.b. , pour tout entier naturel n non nul, $u_n > -2$ donc pour tout entier naturel n non nul, $u_n + 4 > 0$. De plus $u_0 + 4 = -1 \neq 0$ donc la suite u est définie sur $\mathbb{N}$.

2. Il semble que la suite (u_n) converge vers -2 :



3. **a.** Pour tout entier naturel n , $u_n \neq -2$ d'après 1.b. , sachant que $u_0 = -1 \neq -2$ donc v_n existe pour tout entier naturel n.

b. $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}+2} = \dfrac{1}{\dfrac{-4}{u_n+4}+2} = \dfrac{u_n+4}{2u_n+4}$

On a donc :

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n+4}{2u_n+4} - \dfrac{1}{u_n+2} = \dfrac{u_n+4-2}{2(u_n+2))} = \dfrac{1}{2}$.

v est donc arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

c. D'après 3.b. , pour tout entier naturel n, $v_n = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}n$ donc $u_n = \dfrac{1}{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n} - 2$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$.

Exercice III

1. $z \neq 1$:
$\dfrac{z-2}{z-1} = z \Leftrightarrow z-2 = z^2 - z \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0.$
Le discriminant de ce trinôme du second degré est -4 donc on obtient deux solutions complexes $z_1 = \dfrac{2+i2}{2} = 1+i$ et $z_2 = 1-i$.
$|z_1| = \sqrt{2}$, $arg(z_1) = -\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ et $|z_2| = \sqrt{2}$, $arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

2. $z \neq 1$:
$\dfrac{z-2}{z-1} = \mathrm{i} \Leftrightarrow z(1-i) = 2-i \Leftrightarrow z = \dfrac{2-i}{1-i} \Leftrightarrow z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{i}{2}.$

3. **a.** $\left|\dfrac{z-2}{z-1}\right| = \dfrac{MB}{MA}$ et $arg\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right) = (\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})$ $[2\pi]$.

b. D'après 3.a. M est sur la médiatrice de $[AB]$ car $|i| = 1$ donc $MA = MB$ et le triangle AMB est rectangle en M donc $MI = \dfrac{1}{2}AB$ avec I milieu de $[AB]$. Le triangle AMB étant isocèle en M, I est aussi le pied de la hauteur issue de M. On en déduit que $\mathcal{R}e(z_M) = \frac{3}{2}$ et $\mathcal{I}m(z_M) = \frac{1}{2}$.
Donc $z_M = \dfrac{3}{2} + \dfrac{i}{2}$.

4. **a.** on a :$\left|\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^n\right| = \left(\dfrac{|z-2|}{|z-1|}\right)^n$ or $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^n = \mathrm{i}$ donc $\left(\dfrac{|z-2|}{|z-1|}\right)^n = 1$ ce qui équivaut à $\dfrac{|z-2|}{|z-1|} = 1$ car un module est un réel positif. On obtient donc que $|z-2| = |z-1|$. M appartient donc à la médiatrice de $[AB]$. Par le même raisonnement qu'à la question 3.b. , on obtient le résultat.

b. $z \neq 1$:
$\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^2 = \mathrm{i} \Leftrightarrow (z-2)^2 = i(z-1)^2$ en écrivant que $z = \frac{3}{2} + iy$ d'après 4.b. , avec $y \in \mathbb{R}$ on obtient :
$\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)^2 = \mathrm{i} \Leftrightarrow (-\frac{1}{2}+iy)^2 = i(\frac{1}{2}+iy)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} - iy - y^2 = i\frac{1}{4} - y - iy^2 \Leftrightarrow y^2 - y - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ ou $y = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. On obtient donc deux solutions $z = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ ou $z = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Exercice IV (enseignement obligatoire)

1. **a.** $RC = \dfrac{3}{2}$. De plus U_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout réel $t \in \mathbb{R}^+$, $U_1'(t) = 4e^{-\frac{2}{3}t} + 4t \times \left(-\dfrac{2}{3}\right)e^{-\frac{2}{3}t}$ donc $U_1(t) + \dfrac{3}{2}U_1'(t) = \dfrac{3}{2} \times 4e^{-\frac{2}{3}t} = V(t)$. U_1 est donc solution de (1).

b. Les propositions suivantes sont équivalentes :
"U solution de (1)", "$U(t) + \dfrac{3}{2}U'(t) = V(t)$", "$U(t) + \dfrac{3}{2}U'(t) - U_1(t) - \dfrac{3}{2}U_1'(t) = V(t) - V(t)$" car U_1 est solution de (1) donc "U solution de (1)" $\Leftrightarrow$"$(U-U_1)(t) + \dfrac{3}{2}(U-U_1)'(t) = 0$" $\Leftrightarrow$"$U - U_1$ est solution de l'équation différentielle $U(t) + \dfrac{3}{2}U'(t) = 0$".

c. Les solutions de (2) sont les fonctions U définies sur $\mathbb{R}^+$ par $U(t) = Ke^{-\frac{2}{3}t}$ où $K \in \mathbb{R}$.
D'après 1.b. , U est solution de (1) si et seulement si $U - U_1$ est solution de (2). donc U est solution de (1) si et seulement si $(U-U_1)(t) = Ke^{-\frac{3}{2}t}$. Les solutions de (1) sont donc les fonctions U définies sur $[0; +\infty[$ par $U(t) = Ke^{-\frac{2}{3}t} + U_1(t)$.

d. $U(0) = \dfrac{1}{2}V(0)$ donc $U(0) = 3$ or d'après 1.c. , $U(0) = K$ donc $K = 3$ et $U(t) = 3e^{-\frac{2}{3}t} + 4te^{-\frac{2}{3}t}$

2. **a.** U est dérivable sur $[0;+\infty[$ et, pour tout réel positif t, $U'(t) = 4e^{-\frac{2}{3}t} - (4t+3)\times\left(-\frac{2}{3}\right)e^{-\frac{2}{3}t} = \frac{2(-4t+3)}{3}e^{-\frac{2}{3}t}$. La fonction exponentielle étant positive sur $\mathbb{R}$, le signe de U' est celui de $-4t+3$ et donc U est strictement croissante sur $[0;\frac{3}{4}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{3}{4};+\infty[$.

De plus $4te^{-\frac{2}{3}t} = 6\frac{\frac{2}{3}t}{e^{\frac{2}{3}t}}$ or $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} 4te^{-\frac{2}{3}t} = 0$. De plus $\lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{2}{3}t = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{2}{3}t} = 0$. La limite en $+\infty$ de U est donc 0.

b. La fonction U est continue strictement décroissante sur $[\frac{3}{4};20[= I$ et $10^{-3}\in U(I) = [6e^{-\frac{1}{2}};83e^{-\frac{40}{3}}]$.

L'équation $U(t) = 10^{-3}$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $[\frac{3}{4};20]$.

De plus, sur $[0;\frac{3}{4}]$, d'après les variations de U, on a $U\geq 3$ donc l'équation $U(t) = 10^{-3}$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

L'équation $U(t) = 10^{-3}$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $[0;20]$ dont un encadrement d'amplitude une seconde est $16\leq\alpha\leq 17$ d'après la calculatrice.

c. D'après 2.b. et les variations de U, pour $t\geq\alpha$.

Exercice IV (enseignement de spécialité)

1. **a.** $(n+3)(3n^2-9n+16) = 3n^3-11n+48$. Or pour tout entier naturel n, $3n^2-9n+16$ est un entier relatif. Ainsi pour tout entier naturel n, $3n^3-11n+48$ est divisible par $n+3$.

b. $3n^2-9n+16$ est un trinôme à coefficients réels de discriminant $\Delta = (-9)^2-4\times 3\times 16 = -111$ ainsi le trinôme n'a pas de racines réelles, il est donc du signe de son terme dominant : positif. Ainsi $3n^2-9n+16$ est un entier naturel.

2. Soit $d\in\mathcal{D}(a;b)$, d divise $bc-a$ (par combinaison linéaire) donc $d\in\mathcal{D}(bc-a;b)$. Ainsi $\mathcal{D}(a;b)\subset\mathcal{D}(bc-a;b)$.

Soit $d\in\mathcal{D}(bc-a;b)$, d divise $(bc-a)-bc = a$ (par combinaison linéaire) donc $d\in\mathcal{D}(a;b)$. Ainsi $\mathcal{D}(bc-a;b)\subset\mathcal{D}(a;b)$.

Donc $\mathcal{D}(a;b) = \mathcal{D}(bc-a;b)$ d'où $PGCD(a,b) = PGCD(bc-a,b)$.

3. $3n^3-11n = n(3n^2-11)$. Or pour $n\geqslant 2$, $n^2\geqslant 4$ car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $3n^2\geqslant 12$ ainsi $3n^2-11\geqslant 1$ donc $n(3n^2-11)\geqslant 0$.

En utilisant l'égalité précédente pour $a = 3n^3-11n$; $b = n+3$ et $c = 3n^2-9n+16$ on a $bc-a = (n+3)(3n^2-9n+16)-(3n^3-11n) = 3n^3-11n+48-(3n^3-11n) = 48$ donc $PGCD(3n^3-11n;n+3) = PGCD(48;n+3)$.

4. **a.** $\mathcal{D}(48) = \{1;2;3;4;6;8;12;16;24;48\}$.

b. Pour $n\geqslant 2$; $3n^3-11n\geqslant 0$ et $n+3>0$ donc $\frac{3n^3-11n}{n+3}\geqslant 0$.

$\frac{3n^3-11n}{n+3}$ est un entier relatif :

si et seulement si $n+3$ divise $3n^3-11n$

si et seulement si $PGCD(n+3,3n^3-11n) = n+3$

si et seulement si $PGCD(48,n+3) = n+3$

si et seulement si $n+3$ divise 48

si et seulement si $n\in\{-2;-1;0;1;3;5;9;13;21;45\}$

Pour que $\frac{3n^3-11n}{n+3}$ soit un entier naturel il faut et il suffit que n soit égal à 3 ; 5 ; 9 ; 13 ; 21 ou 45.