Devoir de mathématiques n°7

Exercice 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant à la réponse choisie.

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 biographies et 50 romans policiers. 40 % des écrivains de biographies sont français et 70 % des écrivains de romans policiers sont français. Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :
   a. $0,25$ **b.** $0,6$ **c.** $\dfrac{1}{50}$
2. Le lecteur ayant choisi une biographie, la probabilité que l'auteur soit français est :
   a. $0,3$ **b.** $0,4$ **c.** $0,8$
3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est
   a. $1,05$ **b.** $0,175$ **c.** $0,7$
4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :
   a. $0,9$ **b.** $0,7$ **c.** $0,475$
5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :
   a. $\dfrac{7}{19}$ **b.** $\dfrac{7}{50}$ **c.** $0,6$
6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque ; la probabilité qu'il ait choisi au moins une biographie est :
   a. $1-(0,25)^{20}$ **b.** $20\times 0,75$ **c.** $0,75\times(0,25)^{20}$

Exercice 2

Les parties A et B sont indépendantes.
Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,01.

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 100 composants soit assimilé à 100 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés. Alain achète 100 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-1} près.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.
3. Quel est, par lot de 100 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 2 \times 10^{-3}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$ (on pourra se reporter au formulaire ci-dessous).

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :
   (a) si ce composant est défectueux ;
   (b) si ce composant n'est pas défectueux.
   Donner une valeur approchée de ces probabilités 10^{-2} près.
2. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.
   Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est :
   $$P(T \geqslant t) = 0,01\mathrm{e}^{-2\times10^{-3}t} + 0,99\mathrm{e}^{-10^{-4}t}.$$
   (on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,01).
3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?
   Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

Formulaire Loi exponentielle (ou de durée de vie sans vieillissement) de paramètre λ sur $[0\ ;\ +\infty[$:

Pour $0 \leqslant a \leqslant b$, $P([a\ ;\ b]) = \displaystyle\int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

Pour $c \geqslant 0$, $P([c\ ;\ +\infty[) = 1 - \displaystyle\int_0^c \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C.
À l'instant 0, la puce est en A et pour tout entier naturel n :

- si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n+1)$, elle est soit en B avec une probabilité égale à $\dfrac{2}{3}$, soit en C avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{3}$.
- si à l'instant n la puce est en B, alors elle y reste.
- si à l'instant n la puce est en C, alors à l'instant $(n+1)$, elle est soit en A, soit en B de façon équiprobable.

On note A_n (respectivement $B_n,\ C_n$) l'événement « à l'instant n la puce est en A » (respectivement en B, en C) et on note a_n (respectivement $b_n,\ c_n$) la probabilité de l'événement A_n (respectivement $B_n,\ C_n$), on a donc $a_0 = 1,\ b_0 = c_0 = 0$.

Pour traiter l'exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

1. Calculer $a_k,\ b_k$ et c_k pour k entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant 3$.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n,
   $$a_n + b_n + c_n = 1 \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}a_n \end{array}\right.$$
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+2} = \dfrac{1}{6}a_n$.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel p,
   $$\left\{\begin{array}{lcl} a_{2p} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^p & \text{et} & a_{2p+1} = 0 \\ c_{2p} = 0 & \text{et} & c_{2p+1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^p \end{array}\right.$$
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
   On admet que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$. Quelle est la limite de b_n lorsque n tend vers $+\infty$?