Devoir de Mathématiques n°6

Exercice 1

$\boxed{\text{Restitution organisée de connaissances}}$

1. Démontrer que $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ pour u et v deux fonctions dérivables à dérivées continues sur l'intervalle $[a;b]$.
2. On considère les intégrales $I = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin(x)\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos(x)\mathrm{d}x$.
   (a) Démontrer que $I = -J$ et $I = J + \mathrm{e}^\pi + 1$.
   (b) En déduire les valeurs exactes de I et J.

Exercice 2

On considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Calculer I_1 au moyen d'une intégration par parties.
   (b) Montrer que $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) En déduire les valeurs exactes de I_2 et I_3.
2. (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
   (b) Prouver que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
3. (a) Montrer que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[0;+\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$ et dresser le tableau de ses variations.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par son terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$.
   (a) Justifier que, si $n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$.
   (b) Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x) = [\ln(x+3)]^2$.
   (a) Justifier la dérivabilité sur $[0;+\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.
   (b) On pose pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\mathrm{d}x$.
   Calculer I_n.
4. On pose pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.
   Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?