Correction du devoir maison de Mathématiques n°5

Problème 1

- Initialisation : $(1+\alpha)^0 = 1 \geqslant 1 = 1 + 0\alpha$.
- Hérédité : $(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)(1+\alpha)^n \geqslant (1+\alpha)(1+n\alpha) = 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 \geqslant 1 + (n+1)\alpha$
- Conclusion : $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$ pour $n \geqslant 0$.

1. On a $\pm x > -|x| > 1 - n_0$ donc $1 \pm \dfrac{x}{n} > \dfrac{n - n_0}{n} \geqslant 0$.
2. On a :
$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)\left(\frac{1+\dfrac{x}{n+1}}{1+\dfrac{x}{n}}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^n$$
D'où :
$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \geqslant \left(1+\frac{x}{n+1}\right)\left(1-\frac{nx}{(n+1)(n+x)}\right) = 1 + \frac{x^2}{(n+1)^2(n+x)} \geqslant 1$$
3. On a :
$$v_{n+1}(x) - v_n(x) = -\frac{u_{n+1}(-x) - u_n(-x)}{u_n(-x)u_{n+1}(-x)} \leqslant 0$$
4. On a
$$\frac{u_n(x)}{v_n(x)} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n$$
D'où :
$$1 - \frac{x^2}{n} \leqslant \frac{u_n(x)}{v_n(x)} \leqslant 1$$
En multipliant l'inégalité par $v_n(x)$ puis en retranchant $u_n(x)$, on obtient :
$$-\frac{x^2 v_n(x)}{n} \leqslant u_n(x) - v_n(x) \leqslant 0$$
La suite $(v_n(x))$ est décroissante minorée par 0 donc elle converge vers un réel $l(x)$, par passage à la limite dans l'inégalité précédente on a $\lim(v_n - u_n) = 0$ d'après le théorème des gendarmes, les suites sont donc adjacentes et convergent vers $l(x)$.
5. Si $x = 0$ alors $u_n = v_n = 1$ donc $l(0) = 1$.
6. On a :
$$u_n(x)\left(1+\frac{h}{n+x}\right)^n = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{h}{n+x}\right)\right)^n = \left(1+\frac{x+h}{n}\right)^n = u_n(x+h)$$

On pose $\alpha_n = \dfrac{h}{n+x}$, on a $\lim \alpha_n = 0$ donc pour n suffisamment grand $\alpha_n > -1$ et on peut appliquer l'inégalité de Bernoulli :

$$u_n(x+h) \geqslant u_n(x)\left(1 + \frac{nh}{n+x}\right)$$

D'où par passage à la limite $l(x+h) \geqslant l(x)(1+h)$.

7. En remplaçant h par $-h$, on obtient $l(x-h) \geqslant l(x)(1-h)$. En remplaçant x par $x+h$ on obtient $l(x) \geqslant l(x+h)(1-h)$. Pour $h < 1$ on a $1-h > 0$ donc $\dfrac{l(x)}{1-h} \geqslant l(x+h)$.

8. Pour $h < 1$ on a :

$$l(x)(1+h) \leqslant l(x+h) \leqslant \frac{l(x)}{1-h}$$

D'où :

$$hl(x) \leqslant l(x+h) - l(x) \leqslant \frac{h}{1-h} l(x)$$

Si $h > 0$, alors :

$$l(x) \leqslant \frac{l(x+h) - l(x)}{h} \leqslant \frac{1}{1-h} l(x)$$

Et si $h < 0$, alors :

$$l(x) \geqslant \frac{l(x+h) - l(x)}{h} \geqslant \frac{1}{1-h} l(x)$$

On en déduit par passage à la limite et en utilisant le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{l(x+h) - l(x)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{l(x+h) - l(x)}{h} = l(x)$$

On admet qu'alors :

$$\lim_{h \to 0} \frac{l(x+h) - l(x)}{h} = l(x)$$

La fonction $x \mapsto l(x)$ est donc dérivable et $l'(x) = l(x)$. On a aussi montré que $l(0) = 1$, on vient donc de prouver l'existence de la fonction exponentielle.

Problème 2

Le problème revient a étudier la suite : $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \sqrt{a + u_n} \quad , \quad n \geqslant 0 \end{cases}$

- La fonction $f(x) = \sqrt{a+x}$ est croissante sur $[0; +\infty[$ et $u_0 \leqslant u_1 = \sqrt{a}$, on peut montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
- On peut montrer par récurrence que la suite est majorée par $1+a$, en utilisant l'inégalité $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$ pour $x \geqslant 0$. La suite est donc convergente.
- Pour trouver la limite, on utilise la continuité de la fonction f et on résout l'équation $f(x) = x$. On obtient $l = \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4a})$.

Problème 3

On remarque que :

$$v_n - l = \frac{(u_1 - l) + (u_2 - l) + \cdots + (u_n - l)}{n}$$

On peut donc se ramener au cas où la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

Étant donné $e > 0$, on cherche un rang n_0 à partir duquel $v_n \in]-e;+e[$ soit $-e \leqslant v_n \leqslant e$.

On sait qu'il existe un rang n_1 à partir duquel $u_n \in]-\frac{e}{2};+\frac{e}{2}[$ soit $-\frac{e}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{e}{2}$. D'où pour $n \geqslant n_1$:

$$\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}}{n} - \frac{n - n_1}{n}.\frac{e}{2} \leqslant v_n \leqslant \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}}{n} + \frac{n - n_1}{n}.\frac{e}{2}$$

et :

$$\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}}{n} - \frac{e}{2} \leqslant v_n \leqslant \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}}{n} + \frac{e}{2}$$

La quantité $\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}}{n}$ tend vers 0 pour $n \to +\infty$ donc il existe un rang n_2 à partir duquel $-\frac{e}{2} \leqslant \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}}{n} \leqslant \frac{e}{2}$.

Maintenant si on considère $n_0 = max(n_1; n_2)$ on a pour $n \geqslant n_0$:

$$-e \leqslant v_n \leqslant e$$

C.Q.F.D.

La réciproque est fausse, il suffit de considérer la suite divergente $u_n = (-1)^n$ pour laquelle (v_n) converge vers 0.