Correction du devoir de Mathématiques n°4

Exercice 1

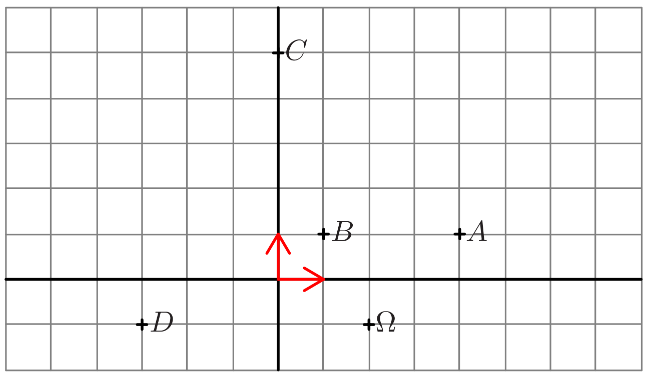
1. (a)

$$\arg\left(\frac{p-m}{n-m}\right) = \arg(p-m)-\arg(n-m) = \arg(z_{\overrightarrow{MP}})-\arg(z_{\overrightarrow{MN}}) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{MP}\right)-\left(\vec{u}, \overrightarrow{MN}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$$

(b)

$$\left|\frac{p-m}{n-m}\right| = \frac{|p-m|}{|n-m|} = \frac{|z_{\overrightarrow{MP}}|}{|z_{\overrightarrow{MN}}|} = \frac{MP}{MN}$$

2.



3. (a) $z_{A'} = (1+2i)(4+i)-2-4i = 5i = z_C$ donc C est l'image de A par f.
$z_{B'} = (1+2i)(1+i)-2-4i = -3-i = z_D$ donc D est l'image de B par f.

(b) Ω est invariant par f si et seulement si $f(\omega) = \omega$ soit :

$$\begin{aligned} \omega &= (1+2i)\omega - 2 - 4i \\ -2i\omega &= -2-4i \\ \omega &= \frac{-2-4i}{-2i} = \frac{(-2-4i)\times(2i)}{(-2i)\times(2i)} = \frac{-4i+8}{4} = 2-i \end{aligned}$$

4. (a)

$$z' - z = (1+2i)z - 2 - 4i - z = 2iz - 2 - 4i = -2i(2-i-z)$$

(b) On en déduit que :

$$z' - z = -2i(\omega - z)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{MM'}{\Omega M} &= \left|\frac{z'-z}{\omega - z}\right| = |-2i| = 2 \\ (\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MM'}) &= \arg\left(\frac{z'-z}{\omega-z}\right) = \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Exercice 2

1. D'après (1) et (2), on a $[f(0)]^2 = [f'(0)]^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$ donc $f(0) = 0$.
2. De plus, on a $[f'(x)]^2 = 1 + [f(x)]^2 > 0$ donc f' ne s'annule pas.
3. En dérivant chaque membre de l'égalité de la propriété (1), on a :
$$2f'(x) \times f''(x) - 2f(x) \times f'(x) = 0$$
soit :
$$2f'(x)(f''(x) - f(x)) = 0$$
or f' ne s'annule pas donc pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$.
4. (a) On a $u(0) = f'(0) + f(0) = 1 + 0 = 1$ et $v(0) = f'(0) - f(0) = 1 - 0 = 1$.
   (b) On a $u' = f'' + f' = f + f' = u$ et $v' = f'' - f' = f - f' = -v$.
   (c) La fonction u est donc de la forme $C\mathrm{e}^x$ et comme $u(0) = 1$ on a $u(x) = \mathrm{e}^x$. La fonction v est de la forme $C\mathrm{e}^{-x}$ et comme $v(0) = 1$ on a $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
   (d) On a pour tout réel x :
$$f(x) = \frac{u(x) - v(x)}{2} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Problème

Partie A

1. Les solutions de l'équation (1) sont de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{2x}$.
2. (a) $u(x) = (ax + b)\mathrm{e}^x$ est solution de l'équation (2) si et seulement si :
$$\begin{array}{rcl} u'(x) - 2u(x) & = & x\mathrm{e}^x \\ a\mathrm{e}^x + (ax+b)\mathrm{e}^x - 2(ax+b)\mathrm{e}^x & = & x\mathrm{e}^x \\ ((-a-1)x + (a-b))\mathrm{e}^x & = & 0 \\ (-a-1)x + (a-b) & = & 0 \\ (a, b) & = & (-1, -1) \end{array}$$
soit $u(x) = -(x + 1)\mathrm{e}^x$.
   (b) v est une solution de l'équation (2) si et seulement si :
$$\begin{array}{rcl} v'(x) - 2v(x) & = & 0 \\ v'(x) - 2v(x) & = & x\mathrm{e}^x - (u'(x) - 2u(x)) \\ (u+v)'(x) - 2(u+v)(x) & = & x\mathrm{e}^x \end{array}$$
c'est à dire si et seulement si $u + v$ est solution de (1).
   (c) Les solutions de (1) sont donc de la forme $u(x) + C\mathrm{e}^{2x} = C\mathrm{e}^{2x} - (x + 1)\mathrm{e}^x$.
3. La solution de l'équation (1) qui s'annule en 0 est $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x + 1)\mathrm{e}^x$.

Partie B

1. On a :
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$$
de plus :
$$g(x) = \mathrm{e}^x\left(2 - \frac{x}{\mathrm{e}^x} - \frac{2}{\mathrm{e}^x}\right)$$
d'où :
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

2. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2\mathrm{e}^x - 1$ d'où :

x		$-\ln 2$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$\ln 2 - 1$	$\nearrow$

3. On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$ et $\ln 2 - 1 < 0$, la fonction g étant continue et strictement monotone sur les intervalles $]-\infty; -\ln 2]$ et $[-\ln 2; +\infty[$ le théorème des valeurs intermédiaires implique l'existence de deux solutions $\alpha \in]-\infty; -\ln 2]$ et $\beta \in [-\ln 2; +\infty[$ à l'équation $g(x) = 0$.
   (a) On a $g(0) = 0$ donc $\beta = 0$.
   (b) On a $g(-1,6) \simeq 0,0038 > 0$ et $g(-1,5) \simeq -0,0537 < 0$ donc $-1,6 \leqslant \alpha \leqslant -1,5$.
4.

x		α		0	
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Partie C

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^x$$

1. On a :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x\mathrm{e}^x) = 0$$

   de plus :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(1 - \frac{x+1}{\mathrm{e}^x}\right)$$

   d'où :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty$$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - [1 + \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x] = 2\mathrm{e}^{2x} - (x+2)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x g(x)$$

3. On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x		α		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

4. On a $g(\alpha) = 0$ d'où $\mathrm{e}^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{2}$, par conséquent :

$$f(\alpha) = \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - (\alpha+1)\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) = \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{2} - \alpha - 1\right) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$$

   On montre que la fonction $\phi(x) = -\dfrac{x^2 + 2x}{4}$ est croissante sur l'intervalle $[-1,6; -1,5]$ d'où :

$$\begin{aligned} \phi(-1,6) \leqslant \quad & f(\alpha) \quad \leqslant \phi(-1,5) \\ 0,16 \leqslant \quad & f(\alpha) \quad \leqslant 0,1875 \end{aligned}$$