Caractérisation d'un triangle équilatéral dans le plan complexe

Soit ABC un triangle du plan complexe et a, b et c les affixes respectives des points A, B et C. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Théorème 1. *Le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.*

Théorème 2. *Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$.*

Preuve du Théorème 1

1. Prouver que $(1 - j)(1 + j + j^2) = 1 - j^3$. En déduire que $1 + j + j^2 = 0$.
2. Prouver que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $\dfrac{a - c}{b - c} = -j$.
3. En déduire la démonstration du Théorème 1.

Preuve du Théorème 2

1. Prouver que le triangle ABC est équilatéral indirect si et seulement si $a + bj^2 + cj = 0$.
2. Prouver que $(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = (a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ac)$.
3. En déduire la démonstration du Théorème 2.

Application

Théorème 3. *Il n'existe aucun triangle équilatéral dont les coordonnées des sommets dans un repère orthonormé direct du plan sont des entiers.*

On suppose par l'absurde qu'il existe un tiangle équilatéral ABC dont les coordonnées des sommets dans un repère orthonormé direct du plan sont des entiers. On note a, b et c les affixes respectives des points A, B et C.

1. Expliquer pourquoi on peut se ramener au cas $a = 0$.
2. Montrer qu'alors $c = -jb$ ou $c = -j^2 b$.
3. Conclure en utilisant l'irrationalité de $\sqrt{3}$.