

## Méthode d'Euler (Approximation d'une primitive)

Le but de l'activité est d'étudier graphiquement la primitive  $F$  de la fonction  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  vérifiant la condition initiale  $F(0) = 0$ .

### Méthode d'Euler de pas $\delta = 1$ .

On rappelle qu'une fonction  $g$  définie et dérivable au voisinage d'un point  $a$  peut être approchée localement par la fonction affine  $x \mapsto g(a) + g'(a)(x - a)$  au voisinage de  $a$ .

1. (a) Écrire une approximation affine de la fonction  $F$  au voisinage de 0.  
(b) En déduire une valeur approchée de  $F(1)$  et  $F(-1)$ .
2. (a) Écrire une approximation affine de la fonction  $F$  au voisinage de 1, montrer que  $F(2) \simeq F(1) + f(1)$  et en déduire une valeur approchée de  $F(2)$ .  
(b) Écrire une approximation affine de la fonction  $F$  au voisinage de  $-1$ , montrer que  $F(-2) \simeq F(-1) - f(-1)$  et en déduire une valeur approchée de  $F(-2)$ .
3. (a) Écrire une approximation affine de la fonction  $F$  au voisinage de  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $F(n+1) \simeq F(n) + f(n)$  et en déduire à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de  $F(n)$  pour  $1 \leq n \leq 10$ .  
(b) Écrire une approximation affine de la fonction  $F$  au voisinage de  $-n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $F(-n-1) \simeq F(-n) - f(-n)$  et en déduire à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de  $F(-n)$  pour  $1 \leq n \leq 10$ .
4. Tracer sur un graphique l'approximation de la fonction  $F$  réalisée, on prendra comme unités 1cm en abscisse et 5cm en ordonnée et on placera l'origine du repère au centre de la feuille. Faire figurer sur le graphique la tangente à la courbe au point de coordonnées  $(0; 0)$ .

### Méthode d'Euler de pas $\delta$ quelconque.

On considère un pas  $\delta > 0$  et on note  $x_n = \delta n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  la suite des valeurs associées en abscisse. On note  $F_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  la suite des valeurs approchées par la méthode d'Euler des  $F(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Quelle est la valeur de  $F_0$  ?
2. (a) Écrire une approximation affine de la fonction  $F$  au voisinage de  $x_0 = 0$ .  
(b) En déduire la valeur approchée  $F_1$  de  $F(x_1)$  par la méthode d'Euler en fonction de  $\delta$ .
3. (a) Écrire une approximation affine de la fonction  $F$  au voisinage de  $x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  en fonction de  $F_n$ ,  $\delta$  et  $n$ .  
(b) En déduire la valeur approchée  $F_{n+1}$  de  $F(x_{n+1})$  par la méthode d'Euler en fonction de  $F_n$ ,  $\delta$  et  $n$ .
4. Programmer à la calculatrice le tableau de valeurs de la suite ci-dessous avec  $\delta = 0,25$  :

$$\begin{cases} F_n &= 0 \\ F_{n+1} &= F_n + \frac{\delta}{1 + \delta^2 n^2} \end{cases}$$

Tracer sur le graphique de la partie précédente la nouvelle approximation de la fonction  $F$  obtenue.