

## Correction du devoir de Mathématiques n°1

**Exercice 1****Partie A**

On suppose l'existence d'au moins deux réels  $c_1, c_2 \in [a; b]$  avec  $c_1 < c_2$  tels que  $f(c_1) = f(c_2) = k$ . Comme  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $[a; b]$  on a  $f(c_1) > f(c_2)$  soit  $k > k$  ce qui est impossible!

Par conséquent il ne peut exister plus d'une solution  $c \in [a; b]$  à l'équation  $f(c) = k$  si la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $[a; b]$  et comme le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il en existe au moins une si la fonction  $f$  est continue sur  $[a; b]$  nous pouvons conclure à l'existence d'une unique solution  $c \in [a; b]$  à l'équation  $f(c) = k$  si la fonction  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $[a; b]$ .

**Partie B**

1. La fonction  $f$  est une fonction polynôme donc elle est définie continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$$

On en déduit le tableau de variations de la fonction  $f$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		$1$	$5$	$-\infty$

2. On peut écrire pour  $x \neq 0$ ,  $f(x) = -x^3 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$  et de plus :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$$

3. D'après le tableau de variations, on a  $f(x) \geq 1$  si  $x \leq 2$  donc l'équation  $f(x) = 0$  n'admet pas de solution dans  $] -\infty; 2]$ . De plus  $f(2) = 5$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  et  $f$  est strictement décroissante sur  $[2; +\infty[$  donc d'après la question de cours, l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $[2; +\infty[$ .

On remarque également que  $f(3) = 1 > 0$  et  $f(4) = -15 < 0$  donc  $\alpha \in [3; 4]$ .

4. À l'aide d'un tableau de valeurs à la calculatrice on obtient  $3, 10 < \alpha < 3, 11$ .

**Exercice 2**

1. La fonction  $f$  est une fonction rationnelle, son dénominateur ne s'annulant pas elle est définie continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2x + 10)(x^2 + 1) - (x^3 + x^2 + 10x + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 - 7x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}$$

2. (a) L'équation  $X^2 - 7X + 10 = 0$  admet pour solutions  $X_1 = 2$  et  $X_2 = 5$ .
- (b) Les tangentes horizontales de la courbe représentative de la fonction  $f$  s'obtiennent en résolvant l'équation  $f'(x) = 0$  soit  $(x^2)^2 - 7(x^2) + 10 = 0$  et d'après la question précédente on obtient quatre solutions  $x_1 = -\sqrt{5}$ ,  $x_2 = -\sqrt{2}$ ,  $x_3 = \sqrt{2}$  et  $x_4 = \sqrt{5}$ .

De plus :

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(-\sqrt{5}) = \frac{-5\sqrt{5} + 5 - 10\sqrt{5} + 1}{5 + 1} = \frac{6 - 15\sqrt{5}}{6} = 1 - \frac{5\sqrt{5}}{2} \\ f(x_2) &= f(-\sqrt{2}) = \frac{-2\sqrt{2} + 2 - 10\sqrt{2} + 1}{2 + 1} = \frac{3 - 12\sqrt{2}}{3} = 1 - 4\sqrt{2} \\ f(x_3) &= f(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2} + 2 + 10\sqrt{2} + 1}{2 + 1} = \frac{3 + 12\sqrt{2}}{3} = 1 + 4\sqrt{2} \\ f(x_4) &= f(\sqrt{5}) = \frac{5\sqrt{5} + 5 + 10\sqrt{5} + 1}{5 + 1} = \frac{6 + 15\sqrt{5}}{6} = 1 + \frac{5\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

La courbe représentative de la fonction  $f$  admet quatre tangentes horizontales aux points :

$$M_1(-\sqrt{5}; 1 - \frac{5\sqrt{5}}{2}) \quad M_2(-\sqrt{2}; 1 - 4\sqrt{2}) \quad M_3(\sqrt{2}; 1 + 4\sqrt{2}) \quad M_4(\sqrt{5}; 1 + \frac{5\sqrt{5}}{2})$$

- (c) Les variations de la fonction  $f$  s'obtiennent en étudiant le signe de  $f'(x) = \frac{(x^2 - 2)(x^2 - 5)}{(x^2 + 1)^2}$  :

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$+\infty$
$x^2 - 2$	+	+	0	-	0	+
$x^2 - 5$	+	0	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0
$f(x)$	$-\infty$	$1 - \frac{5\sqrt{5}}{2}$	$1 - 4\sqrt{2}$	$1 + 4\sqrt{2}$	$1 + \frac{5\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$

3. (a) On a :

$$\alpha x + \beta + \frac{\gamma x}{x^2 + 1} = \frac{\alpha x(x^2 + 1) + \beta(x^2 + 1) + \gamma x}{x^2 + 1} = \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + (\alpha + \gamma)x + \beta}{x^2 + 1}$$

D'où par identification  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$  et  $\gamma = 9$  et donc :

$$f(x) = x + 1 + \frac{9x}{x^2 + 1}$$

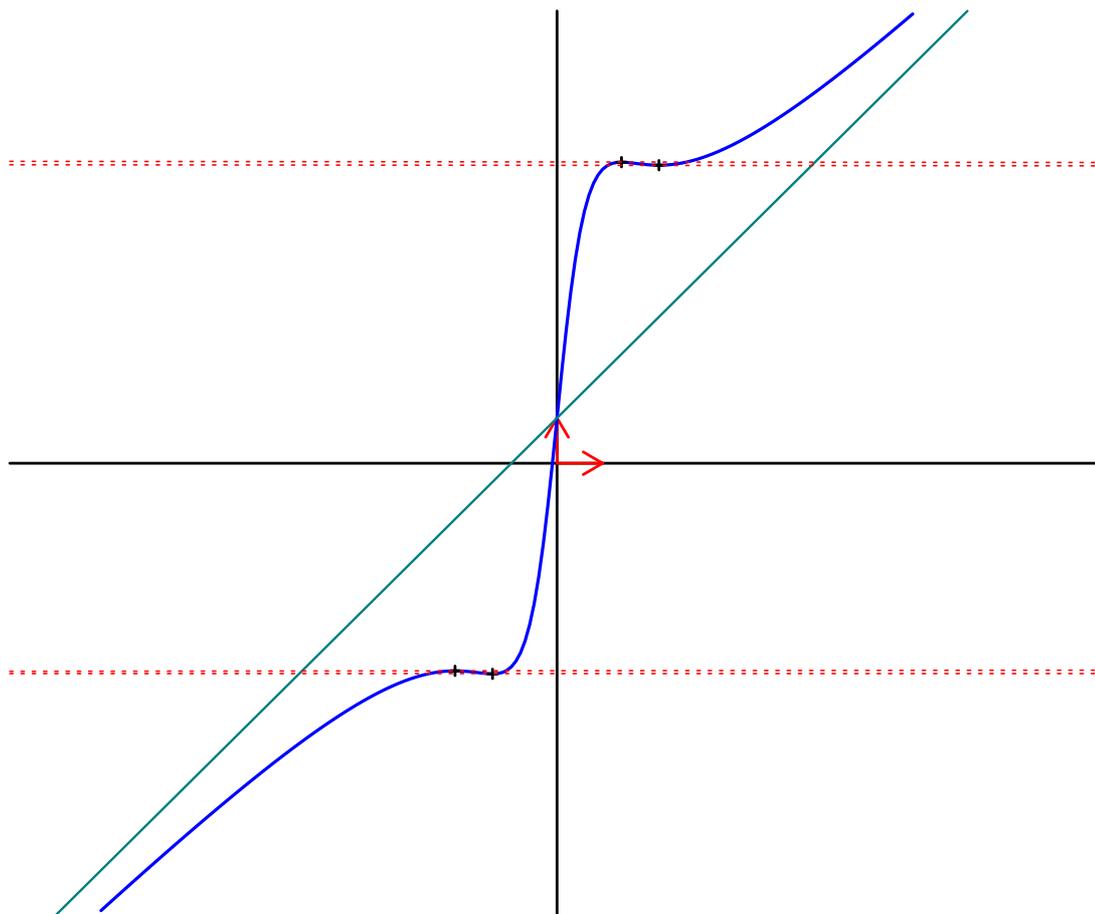
- (b) La courbe représentative de la fonction  $f$  admet pour asymptote oblique en  $-\infty$  et  $+\infty$  la droite d'équation  $y = x + 1$  car :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{9x}{x^2 + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{9}{x + \frac{1}{x}} \right] = 0$$

- (c) La courbe représentative de la fonction  $f$  admet le point  $I(0; 1)$  pour centre de symétrie car :

$$\begin{aligned} \frac{f(-x) + f(x)}{2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{(-x)^3 + (-x)^2 + 10(-x) + 1}{(-x)^2 + 1} + \frac{x^3 + x^2 + 10x + 1}{x^2 + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{-x^3 + x^2 - 10x + 1 + x^3 + x^2 + 10x + 1}{x^2 + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

4. La courbe représentative de la fonction  $f$  est la suivante :



### Exercice 3

1. En raison de la présence de la fonction racine carrée, la fonction  $f$  est définie pour  $1 - x \geq 0$  soit  $x \in ]-\infty; 1]$  et dérivable pour  $1 - x > 0$  soit  $x \in ]-\infty; 1[$ .
2. On utilise la formule de dérivation du produit de deux fonctions :

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{1-x} + x \times \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(\sqrt{1-x})^2 - x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x) - x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{-3x + 2}{2\sqrt{1-x}}$$

3. On en déduit les variations de la fonction  $f$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{2}{3}$	$1$
$f'(x)$	$+$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$0$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$0$

4. D'où l'étude du nombre de solutions de l'équation  $f(x) = k$  :
  - Si  $k > \frac{2}{3\sqrt{3}}$  l'équation  $f(x) = k$  n'admet pas de solution.
  - Si  $k = \frac{2}{3\sqrt{3}}$  l'équation  $f(x) = k$  admet une solution.
  - Si  $0 \leq k < \frac{2}{3\sqrt{3}}$  l'équation  $f(x) = k$  admet deux solutions.
  - Si  $k < 0$  l'équation  $f(x) = k$  admet une solution.

5. On remarque que  $0 \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$  donc d'après la question précédente l'équation  $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$  admet deux solutions  $x_1$  et  $x_2$ . De plus on a  $f(0) = 0 < \frac{1}{3\sqrt{3}}$ ,  $f(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3\sqrt{3}} > \frac{1}{3\sqrt{3}}$  et  $f(1) = 0 < \frac{1}{3\sqrt{3}}$  donc on peut poser  $0 < x_1 < \frac{2}{3}$  et  $\frac{2}{3} < x_2 < 1$ .

6. (a)

$$\begin{aligned}
 \cos 3\theta &= \cos(\theta + 2\theta) \\
 &= \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \sin \theta (2 \sin \theta \cos \theta) \\
 &= \cos^3 \theta - \cos \theta \sin^2 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta \\
 &= \cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta \\
 &= \cos^3 \theta - 3(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \\
 &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 3 \cos^3 \theta \\
 &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta
 \end{aligned}$$

(b) On pose  $\gamma = \frac{1}{3}(1 + 2 \cos \theta)$ , alors :

$$\begin{aligned}
 \gamma^2(1 - \gamma) &= \frac{1}{9}(1 + 2 \cos \theta)^2 \left[ 1 - \frac{1}{3}(1 + 2 \cos \theta) \right] \\
 &= \frac{1}{27}(1 + 2 \cos \theta)^2 [3 - (1 + 2 \cos \theta)] \\
 &= \frac{1}{27}(1 + 2 \cos \theta)^2 (2 - 2 \cos \theta) \\
 &= \frac{2}{27}(1 + 2 \cos \theta)^2 (1 - \cos \theta) \\
 &= \frac{2}{27}(1 + 4 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta)(1 - \cos \theta) \\
 &= \frac{2}{27}(1 + 3 \cos \theta - 4 \cos^3 \theta) \\
 &= \frac{2}{27}(1 - (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)) \\
 &= \frac{2}{27}(1 - \cos 3\theta)
 \end{aligned}$$

On en déduit en remplaçant  $\theta$  par  $\frac{5\pi}{9}$  et  $\frac{\pi}{9}$  que :

$$\alpha^2(1 - \alpha) = \frac{2}{27}(1 - \cos \frac{5\pi}{3}) = \frac{2}{27}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{27}$$

et :

$$\beta^2(1 - \beta) = \frac{2}{27}(1 - \cos \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{27}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{27}$$

(c) On en déduit que :

$$\sqrt{\alpha^2(1 - \alpha)} = \sqrt{\beta^2(1 - \beta)} = \sqrt{\frac{1}{27}}$$

et puisque  $\alpha$  et  $\beta$  appartiennent à l'intervalle  $[0; 1]$  :

$$\alpha \sqrt{1 - \alpha} = \beta \sqrt{1 - \beta} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont solutions de l'équation  $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$  et comme  $0 < \alpha < \frac{2}{3}$  et  $\frac{2}{3} < \beta < 1$  on en déduit que  $x_1 = \alpha$  et  $x_2 = \beta$ .