Correction du devoir de Mathématiques n°8

Exercice 1

1. La fonction F est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et $F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$ donc F est une primitive de la fonction logarithme népérien.
   On a $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \, \mathrm{d}x = F(e) - F(1) = 0 - (-1) = 1$.
2. Posons $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = 1$ donc $u'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$ et $v(x) = x$.
   Les fonctions u et v sont des fonctions dérivables sur l'intervalle $[1; e]$ et u' et v' sont continues sur $[1; e]$ donc par une intégration par parties on obtient :
   $$J = [u(x)v(x)]_{x=1}^{x=e} - \int_1^{\mathrm{e}} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [x(\ln x)^2]_{x=1}^{x=e} - \int_1^{\mathrm{e}} 2\ln(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2I$$
3. Comme $I = 1$, on a $J = \mathrm{e} - 2$.
4. On a $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} g(x)\,\mathrm{d}x = I - J = 3 - e$.

Exercice 2

1. On a $I_0 = \displaystyle\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x = [-e^{-x}]_{x=0}^{x=1} = -e^{-1} - (-1) = 1 - \frac{1}{e}$.
2. Posons $u(x) = x^{n+1}$ et $v'(x) = e^{-x}$ donc $u'(x) = (n+1)x^n$ et $v(x) = -e^{-x}$.
   Les fonctions u et v sont des fonctions dérivables sur l'intervalle $[0; 1]$ et u' et v' sont continues sur $[0; 1]$ donc par une intégration par parties on obtient :
   $$\begin{array}{rcl} I_{n+1} & = & [u(x)v(x)]_{x=0}^{x=1} - \displaystyle\int_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ I_{n+1} & = & [-x^{n+1}e^{-x}]_{x=1}^{x=e} - \displaystyle\int_0^1 (n+1)x^n(-e^{-x})\,\mathrm{d}x \\ I_{n+1} & = & -\dfrac{1}{e} + (n+1)\displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ I_{n+1} & = & (n+1)I_n - \dfrac{1}{e} \end{array}$$
3. On en déduit $I_1 = 1 \times I_0 - \dfrac{1}{e} = 1 - \dfrac{2}{e}$ et $I_2 = 2 \times I_1 - \dfrac{1}{e} = 2 - \dfrac{5}{e}$.
4. Sur l'intervalle $[0; 1]$ on a $0 \leqslant x^n e^{-x} \leqslant x^n$, d'où $\displaystyle\int_0^1 0\ \mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$ soit $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et d'après le *Théorème des gendarmes* on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.