Correction du devoir de Mathématiques n°7

Exercice 1

1. FAUX : Si $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ alors $v_0 = -2$ et $v_1 = -1$ et $v_0 < v_1$.
2. FAUX : Si $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ (convergente vers 0) alors $v_n = -2(n+1)$ (divergente vers $-\infty$).
3. VRAI : Si $2 \leqslant u_n$ alors $\dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{1}{u_n}$ et $-1 \leqslant \dfrac{-2}{u_n} = v_n$.
4. FAUX : Si $u_n = (-1)^n$ (divergente) alors $v_n = -2(-1)^n$ (divergente).
5. VRAI : Si (v_n) converge vers 0 alors $|u_n| = \dfrac{2}{|v_n|}$ diverge vers $+\infty$ donc (u_n) ne peut être convergente.

Exercice 2

Partie A

1. La fonction f est dérivable comme composée, quotient et somme de fonctions dérivables sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
   On a :
   $$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{1+x} \times (1+x) - \ln(1+x) \times 1}{(1+x)^2} = 1 - \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(1+x)^2}$$
2. On a $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$. La fonction N est dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables.
   On a :
   $$N'(x) = 2(1+x) + \frac{1}{1+x} = \frac{2(1+x)^2 + 1}{1+x}$$
   Comme x appartient à $]-1\ ;\ +\infty[$, $1 + x > 0$ et par conséquent, $N(x) > 0$. On en déduit que N est croissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
   $N(0) = 0$ donc $N(x) < 0$ pour $x \in]-1\ ;\ 0[$ et $N(x) > 0$ pour $x > 0$.
   De plus $f'(x) = \dfrac{N(x)}{(1+x)^2}$ est du signe du numérateur $N(x)$ car $(1+x)^2 > 0$ pour tout x.
   Par conséquent, $f'(x) < 0$ pour $x \in]-1\ ;\ 0[$, $f'(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$.
   On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

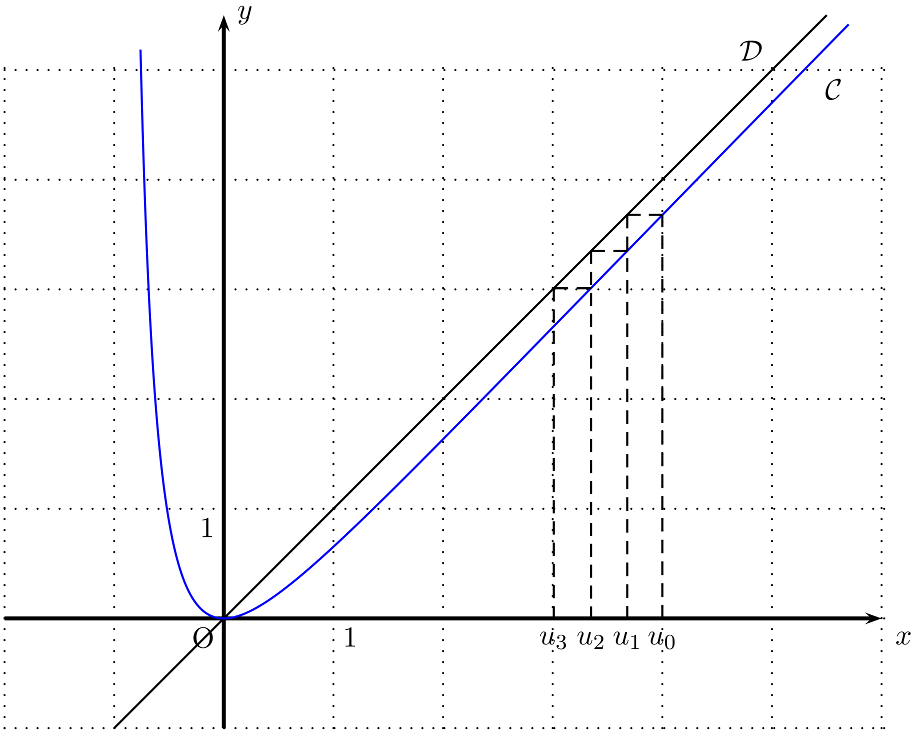
x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	

3. Pour avoir les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{C}$, on résout l'équation $f(x) = x$.
   $f(x) = x \Leftrightarrow -\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) = 0 \Leftrightarrow 1 + x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
   Comme $f(0) = 0$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ se coupent à l'origine du repère.

Partie B

1. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$ donc pour tout x de $[0\ ;\ 4]$, $0 = f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(4)$ de plus $f(4) = 4 - \dfrac{\ln 5}{5} < 4$ donc $f(x) \in [0\ ;\ 4]$.

2. (a)



(b) Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\ ;\ 4]$.
- Initialisation : $u_0 = 4 \in [0\ ;\ 4]$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- Hérédité : supposons que $u_n \in [0\ ;\ 4]$ pour un entier n. Alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0\ ;\ 4]$ d'après 1.
- Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc d'après l'axiome de récurrence elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, $u_n \in [0\ ;\ 4]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - \dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} - u_n = -\dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} \leqslant 0$ car $1 + u_n \geqslant 1$ d'où $\ln(1+u_n) \geqslant 0$.
Par conséquent, la suite (u_n) est décroisssante.

(d) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel l.

(e) On a $u_{n+1} = f(u_n)$, comme f est continue on obtient par passage à la limite que $l = f(l)$, on en déduit d'après la question A.3. que $l = 0$.