Correction du devoir maison de Mathématiques n°4

Exercice 1

1. x et y étant strictement supérieurs à zéro, on a : $x^y = y^x \iff \ln(x^y) = \ln(y^x) \iff y\ln x = x\ln y \iff \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln y}{y}$.
2. (a) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
   On a $h(x) = \ln x \times \dfrac{1}{x}$ de plus $\lim\limits_{x\to 0_+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, il en résulte par produit des limites que $\lim\limits_{x\to 0_+} h(x) = -\infty$.

   (b) On calcule la dérivée du quotient de deux fonctions dérivables :
   $h'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Le signe de la dérivée est celui de $1 - \ln x$. Or $1 - \ln x = 0 \iff x = \mathrm{e}$. La dérivée est strictement positive sur l'intervalle $]0\ ;\ \mathrm{e}[$ (donc h est strictement croissante sur $]0\ ;\ \mathrm{e}[$) et strictement négative sur $]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$ (donc h est strictement décroissante sur $]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$).
   L'extremum est obtenu lorsque la dérivée s'annule en changeant de signe : ici on a un maximum pour $x = \mathrm{e}$ qui est égal à $f(\mathrm{e}) = \dfrac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

   (c) On a $h(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$
3. D'après la question précédente la fonction h est continue et strictement croissante sur $]1\ ;\ \mathrm{e}[$, de plus $f(0) < \lambda < f(e)$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc un réel unique $a \in]1\ ;\ \mathrm{e}[$ tel que $f(a) = \lambda$.
   De même, il existe un réel unique b de $]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$ tel que $f(b) = \lambda$.
   On a donc trouvé $\dfrac{\ln a}{a} = \dfrac{\ln b}{b} = \lambda$.
4. (a) Quand a tend vers 1, $h(a) = \lambda$ tend vers 0 donc $b = s(a)$ tend vers $+\infty$.

   (b) Quand a tend vers e par valeurs inférieures, $h(a) = \lambda$ tend vers $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ donc $b = s(a)$ tend vers e.

   (c) Si a croît, alors b décroît : la fonction s est décroissante.
5. Le seul entier de l'intervalle $]1; e[$ est 2 qui donne le couple $(2; 4)$ et comme $2^4 = 4^2 = 16$ c'est le seul couple d'entiers distincts solution de (E).

Exercice 2

1. $z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$; $\Delta = 64 \times 3 - 64 \times 4 = -64 = (8\mathrm{i})^2$. Il y a donc deux solutions imaginaires conjuguées :
   $\mathrm{S} = \left\{4\sqrt{3} - 4\mathrm{i}\ ;\ 4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}\right\}$.

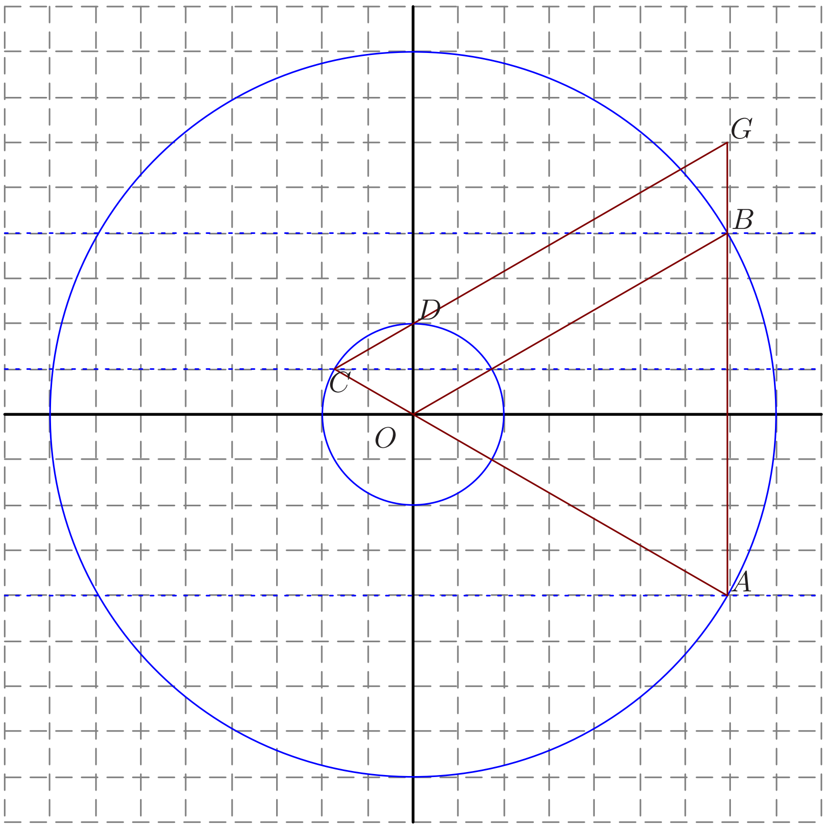
2. (a) $a = 4\sqrt{3} - 4\mathrm{i}$, donc $|a|^2 = 48 + 16 = 64 \iff |a| = 8$. On peut donc écrire $a = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 8\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
   De même $b = 4\sqrt{3} + 4\mathrm{i} = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

   (b) On a déja $|a| = 8 = \mathrm{OA}$ et $|b| = 8 = \mathrm{OB}$. $\mathrm{AB} = |b - a| = |8\mathrm{i}| = 8$.
   Le triangle OAB est donc équilatéral.

3. On a donc $d = \left(-\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \left(-\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{i}$.

4. (a) La somme des coefficients est égale à 1, donc non nulle : le point G existe.
   Par définition $-\overrightarrow{\mathrm{GO}} + \overrightarrow{\mathrm{GD}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ qui se traduit par $z_{\mathrm{G}} = z_{\mathrm{D}} + z_{\mathrm{B}} = 4\sqrt{3} + 6\mathrm{i}$.

   (b)



   (c) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ a a pour affixe $\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et de même le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ a pour affixe $4\sqrt{3} + 4\mathrm{i} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. Ces deux vecteurs sont colinéaires, donc les points C, D et G sont alignés.

   (d) On a montré que $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \iff \overrightarrow{\mathrm{BG}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} \iff$ BGDO est un parallélogramme.

5. On prouve que $\mathrm{G}A = CA = CG = 10$: le triangle ACG est équilatéral.