Méthode d'Euler
(Approximation de la solution d'une équation différentielle)

Le but de l'activité est d'étudier graphiquement la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f'(x) & = & f(x) \\ f(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

On admet l'existence d'une unique fonction f solution.

Approximation de la fonction f par la méthode d'Euler

On rappelle qu'une fonction g définie et dérivable au voisinage d'un point a peut être approchée localement par la fonction affine $x \mapsto g(a) + g'(a)(x-a)$ au voisinage de a.

1. On appelle δ un réel proche de zéro, montrer que $f(a+\delta) \simeq (1+\delta)f(a)$.
2. On définit la suite arithmétique $\left\{\begin{array}{rcl} x_0 & = & 0 \\ x_{n+1} & = & x_n + \delta \ , \ n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$.
   Montrer que l'on peut approcher les valeurs $f(x_n)$ par une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison $(1+\delta)$ et de terme général $y_n = (1+\delta)^n$.
3. (a) On pose $\delta = 0,1$. Calculer à l'aide de la calculatrice les valeurs x_n et y_n pour $0 \leqslant n \leqslant 10$.
   (b) On pose $\delta = -0,1$. Calculer à l'aide de la calculatrice les valeurs x_n et y_n pour $0 \leqslant n \leqslant 10$.
4. Construire une approximation de la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-1;1]$ dans un repère orthonormé d'unité 10 cm.

Calcul d'une valeur approchée de $f(1)$ par la méthode d'Euler

1. Montrer en utilisant la méthode d'Euler avec un pas $\delta = 0,1$ que $f(1) \simeq 1,1^{10}$.
2. Expliquer pourquoi les nombres $e_n = (1+10^{-n})^{10^n}$, $n \in \mathbb{N}$ sont des valeurs approchées de $f(1)$. Quelle conjecture peut-on émettre au sujet de la suite $(e_n)_{n\geqslant 0}$?
3. Calculer à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de $f(1)$ avec 6 décimales exactes.