Devoir de Mathématiques n°2

Exercice 1

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = 2x^3 - x + 5 \qquad f(x) = \sin(5x+3) \qquad f(x) = 2x(3x^2+1)^7 \qquad f(x) = \frac{\sin x}{(2+\cos x)^2}$$

Exercice 2

1. On considère la fonction $g(x) = 20x^3 - 3x^2 - 10$.
   (a) Étudier les variations de la fonction g.
   (b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique racine réelle α et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
   (c) Construire le tableau de signes de la fonction g.
2. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1-10x}{1+x^3}$ et on appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.
   (a) Donner l'ensemble de définition de la fonction f et étudier ses limites aux bornes de cet ensemble. En déduire les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$.
   (b) Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable puis calculer sa dérivée.
   (c) Construire le tableau de variations de la fonction f.
   (d) Construire $\mathcal{C}_f$ en faisant apparaître ses asymptotes ainsi que sa tangente horizontale.
   (e) *(Bonus)* Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle :

$$(E_1) \ : \ [f(x)]^2 + [f'(x)]^2 = 1$$

1. Montrer que les fonctions *sinus* et *cosinus* sont solutions de (E_1).
2. On considère une solution f de l'équation (E_1).
   (a) Prouver que la fonction f est minorée par -1 et majorée par 1.
   (b) On pose $f(x) = \sin[g(x)]$, montrer que f est solution de (E_1) si et seulement si la fonction g vérifie l'équation différentielle $(E_2) \ : \ ([g'(x)]^2 - 1)(\cos[g(x)])^2 = 0$.
   (c) Donner deux familles de solutions de l'équation différentielle (E_2).
   (d) En déduire deux familles de solutions de l'équation (E_1).
   (e) *(Bonus)* Les fonctions *sinus* et *cosinus* appartiennent-elles à ces familles de solutions ?