Correction du devoir maison de Mathématiques n°2

Exercice 1

1. (a) La fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle $[0;2\pi]$ et :

$$g'(x) = 1 \times \cos(x) + x \times (-\sin(x)) - \cos(x) = -x\sin(x)$$

La fonction g' est donc de signe opposé à la fonction *sinus* sur l'intervalle $[0;2\pi]$, on en déduit le tableau de variations de la fonction g :

x	0		π		2π
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\pi$	$\nearrow$	2π

(b) La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;\pi]$ donc $g(x)$ est strictement négative et ne peut donc s'annuler sur cet intervalle. En revanche la fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[\pi;2\pi]$ avec $g(\pi) \leqslant 0 \leqslant g(2\pi)$ donc d'après le *Théorème des Valeurs Intermédiaires* il existe un unique réel dans l'intervalle $[\pi;2\pi]$ en lequel la fonction g s'annule.

En conclusion, il existe un unique réel $\alpha \in]0;2\pi]$ tel que $g(\alpha) = 0$, la calculatrice nous permet d'obtenir l'encadrement $4,4934 < \alpha < 4,4935$.

(c) On en déduit le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[0;2\pi]$:

x	0		α		2π
$g(x)$	0	$-$	0	$+$	

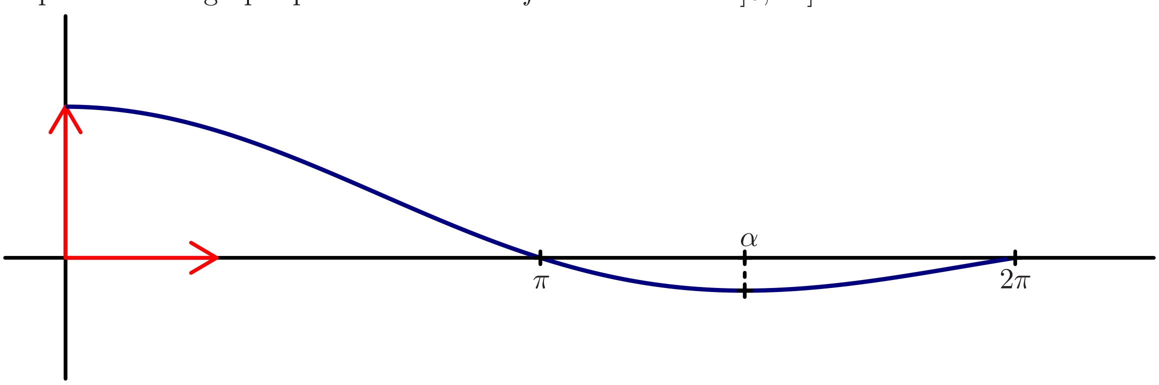
2. (a) La fonction f est le quotient d'une fonction dérivable par une fonction dérivable ne s'annulant pas sur l'intervalle $]0;2\pi]$, elle est donc dérivable et on a :

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \times x - \sin(x) \times 1}{x^2} = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

(b) On remarque que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ et on en déduit le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;2\pi]$:

x	0		α		2π
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = \cos\alpha$	$\nearrow$	0

(c) La représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $]0;2\pi]$ est la suivante :



Exercice 2

1. La fonction $f(x) = 2x^2 - x + 7$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x + k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

2. La fonction $f(x) = x^2(x^3+1)^3$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{12}(x^3+1)^4 + k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

3. La fonction $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+3)^2}$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{-1}{2(x^2+3)} + k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

4. La fonction $f(x) = x\sqrt{x}$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}_+^\star$ les fonctions de la forme :

$$F(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

Exercice 3

1. On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$, on a f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 2ax + b$ d'où :

$$\begin{cases} 12(ax^2+bx+c) + (1-6x)(2ax+b) - 11 &= 0 \text{ pour tout } x \\ a \times 1^2 + b \times 1 + c &= 3 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} (2a+6b)x + (b+12c-11) &= 0 \text{ pour tout } x \\ a+b+c &= 3 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} a+3b &= 0 \\ b+12c &= 11 \\ a+b+c &= 3 \end{cases}$$

La solution de ce système est le triplet $a = 3$; $b = -1$; $c = 1$ et la fonction $f(x) = 3x^2 - x + 1$ est donc une solution de l'équation différentielle (E_1) vérifiant la condition initiale $f(1) = 3$.

2. (a) La fonction f est définie et dérivable et ne s'annule pas donc la fonction $\dfrac{1}{f}$ est définie et dérivable et on a :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{2x[f(x)]^2}{[f(x)]^2} = 2x$$

car f est solution de l'équation différentielle (E_2).

(b) La fonction $\dfrac{1}{f}$ est donc une primitive de $2x$, il existe un réel k tel que $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = x^2 + k$ soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2+k}$.

(c) Comme $f(0) = 1$ on a $k = 1$ d'où $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

(d) La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ d'où :

$$f'(x) + 2x[f(x)]^2 = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} + 2x \times \frac{1}{(x^2+1)^2} = 0$$

et de plus on a $f(0) = 1$.