Devoir de Mathématiques n°5

Problème

Une entreprise de menuiserie produit et vend des tables. L'objectif de ce problème est de comparer les recettes et les coûts provoqués par cette activité. On note x le nombre de tables fabriquées chaque semaine, x étant un nombre entier compris entre 2 et 13. Le coût total de production de ces x tables, exprimé **en centaines d'euros**, est donné par :

$$C_T(x) = 0,25x^2 + 1,5x + 20,5$$

Partie A - Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2;13]$ par :

$$f(x) = 0,25x^2 + 1,5x + 20,5$$

Pour tout entier x de l'intervalle $[2;13]$, on a : $C_T(x) = f(x)$.

1. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la dérivée de la fonction f. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[2;13]$.
2. Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f(x)$							48,5					

3. Tracer le représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal avec pour unités en abscisses 1cm pour 1 et en ordonnées 1cm pour 5.

Partie B - Recherche d'un prix de vente

Toutes les tables fabriquées sont vendues et l'entreprise doit fixer le prix de son produit. On note $R(x)$ la recette, en centaines d'euros, occasionnée par la vente de x tables.

1. La première proposition est un prix de 600 euros par table.
   (a) Calculer $R(10)$ dans ce cas.
   (b) Donner l'expression de $R(x)$ en fonction de x.
   (c) À l'aide de la question 2 de la partie A, expliquer pourquoi ce prix de vente ne peut pas convenir sur le plan commercial.
2. La seconde proposition est un prix unitaire de 685 euros.
   (a) Calculer $R(x)$ dans ce cas.
   (b) Représenter sur le graphique précédent la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 6,85x$.
   (c) En déduire graphiquement, en justifiant la réponse, les valeurs entières de x appartenant à l'intervalle $[2;13]$ pour lesquelles la recette sera strictement supérieure au coût total.
3. On se propose de déterminer le nombre de tables fabriquées et vendues pour avoir un bénéfice maximum.
   (a) Montrer que l'expression du bénéfice est :
   $$B(x) = -0,25x^2 + 5,35x - 20,5$$
   (b) Calculer $B'(x)$ où B' désigne la dérivée de la fonction B. En déduire les variations de la fonction B sur l'intervalle $[5;13]$ en précisant les valeurs extrêmes de $B(x)$.
   (c) En déduire la valeur de x qui procure un bénéfice maximum. On pourra calculer $B(10)$ et $B(11)$.