XII. Espaces vectoriels

1 Espaces vectoriels

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1. *On appelle $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** un ensemble E muni d'une **addition** $+$ et d'une **multiplication par un scalaire** $.$ telles que :*

- *l'addition est associative :*
$$\boxed{\text{pour tous } \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in E,\ \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}}$$
- *l'addition est commutative :*
$$\boxed{\text{pour tous } \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E,\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}}$$
- *il existe un vecteur nul $\overrightarrow{0}$:*
$$\boxed{\text{pour tout } \overrightarrow{u} \in E,\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}}$$
- *tout vecteur de E admet un opposé :*
$$\boxed{\text{pour tout } \overrightarrow{u} \in E \text{ il existe } -\overrightarrow{u} \in E \text{ tel que } \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}}$$
- *1 est un élément neutre pour la multiplication par un scalaire :*
$$\boxed{\text{pour tout } \overrightarrow{u} \in E,\ 1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}}$$
- *la multiplication par un scalaire est pseudo-associative :*
$$\boxed{\text{pour tous } \lambda, \mu \in \mathbb{K} \text{ et pour tout } \overrightarrow{u} \in E,\ (\lambda\mu).\overrightarrow{u} = \lambda.(\mu.\overrightarrow{u})}$$
- *la multiplication par un scalaire est distributive à droite par rapport à l'addition :*
$$\boxed{\text{pour tout } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et pour tous } \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E,\ \lambda.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda.\overrightarrow{u} + \lambda.\overrightarrow{v}}$$
- *la multiplication par un scalaire est distributive à gauche par rapport à l'addition :*
$$\boxed{\text{pour tous } \lambda, \mu \in \mathbb{K} \text{ et pour tout } \overrightarrow{u} \in E,\ (\lambda + \mu).\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{u}}$$

Exemple 1. *Exemples de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.*
- *ensemble $\mathbb{R}^2$ des vecteurs du plan*
- *ensemble $\mathbb{R}^3$ des vecteurs de l'espace*
- *ensemble $\mathbb{R}^n$ des vecteurs à n coordonnées réelles*
- *ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$*
- *ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels*
- *ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles*
- *ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à coefficients réels à n lignes et p colonnes*

Exemple 2. *Exemples de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.*
- *ensemble $\mathbb{C}^n$ des vecteurs à n coordonnées complexes*
- *ensemble $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes*
- *ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ des matrices à coefficients complexes à n lignes et p colonnes*

Propriété 1. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ on a :*
- $0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
- $(-1).\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$

Définition 2. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,.)$, on dit que $(F,+,.)$ est un* **sous-espace vectoriel** *de $(E,+,.)$ si $(F,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$.*

Remarque 1. $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ *et E sont des sous-espaces vectoriels de E.*

Propriété 2. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,.)$ alors $(F,+,.)$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$ si :*
- $F \subset E$
- $\overrightarrow{0} \in F$
- *F est* **stable par combinaisons linéaires** *: pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in F$ on a $\lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v} \in F$*

Exercice 1. *Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions dérivables est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*

Exercice 2. *Montrer que l'ensemble des matrices carrées diagonales de taille n à coefficients réels est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 3. *Montrer que* $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ x+y=0\right\}$ *est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, le représenter graphiquement.*

Propriété 3. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire* ***homogène*** *à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.*

Exercice 4. *Montrer que l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y''+y=0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*

Exercice 5. *L'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré 3 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?*

Exercice 6. *Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.*

Propriété 4. *L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.*

Exercice 7. *Montrer que* $F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y=0\right\}$ *et* $G = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x-y=0\right\}$ *sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, repésenter graphiquement F, G et $F \cap G$.*

Exercice 8. *On considère* $F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y=0\right\}$ *et* $G = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x-y=0\right\}$*, montrer que l'union de F et G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*

Définition 3. **Somme de sous-espaces vectoriels**
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on définit $\boxed{F+G = \{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} \ / \ \overrightarrow{u} \in F \text{ et } \overrightarrow{v} \in G\}}$.

Propriété 5. *$F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.*

Exercice 9. *On considère* $F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ y=z=0\right\}$ *et* $G = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x=z=0\right\}$*, déterminer $F+G$, représenter graphiquement F, G et $F+G$.*

Définition 4. Somme directe de sous-espaces vectoriels
On considère deux sous-espaces vectoriels F et G de E, si pour tout $\overrightarrow{w} \in F+G$ il existe un unique couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F \times G$ tel que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ alors la somme $F+G$ est dite directe *et notée $F \oplus G$.*

Exercice 10. *Montrer que la somme de l'exercice 9 est directe.*

Propriété 6. *Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.*

Exercice 11. *Montrer en utilisant la propriété précédente que la somme de l'exercice 9 est directe.*

Définition 5. Sous-espaces vectoriels supplémentaires
Deux sous-espace vectoriels F et G de E sont dits supplémentaires *si $F \oplus G = E$.*

Exercice 12. *Déterminer deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.*

2 Familles finies de vecteurs

Propriété 7. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs
Si $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_p)$ est une famille de p vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs $\boxed{\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_p) = \{\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 + \dots + \lambda_p \overrightarrow{u}_p \ / \ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}\}}$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_p$.*

Remarque 2.
- *Pour $p=0$, on convient que* $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
- *Pour $p=1$ et $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$,* $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}) = \{\lambda \overrightarrow{u} \ / \ \lambda \in \mathbb{K}\}$ *est appelé* **droite vectorielle** *engendrée par la vecteur $\overrightarrow{u}$.*
- *Pour $p=2$ et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires,* $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \{\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} \ / \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ *est appelé* **plan vectoriel** *engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*

Exercice 13. *On considère les polynômes $P(X) = X^2+X+1$ et $Q(X) = 2X-1$, déterminer une condition nécessaire et suffisante sous la forme d'une relation entre a, b et c pour que le polynôme aX^2+bX+c appartienne à* $\mathrm{Vect}(P,Q)$.

Définition 6. *Si $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_p)$ est une famille de p vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E telle que* $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_p) = E$ *on dit qu'elle est* **génératrice** *de E.*

Exercice 14. *La famille* $\left(\overrightarrow{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$ *est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?*

Exercice 15. *La famille $(P_1 = 1, P_2 = X+X^2, P_3 = X^2+X^3, P_4 = X^3)$ est-elle génératrice de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 ?*

Exercice 16. *L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ admet-il une famille génératrice ?*

Définition 7. *Une famille de vecteurs est dite* **libre** *si aucun de ses vecteurs ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille. Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite* **liée***.*

Remarque 3. *Comme* $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$*, on convient que* $(\overrightarrow{0})$ *n'est pas une famille libre.*

Remarque 4. *Deux vecteurs non colinéaires forment une famille libre, trois vecteurs non coplanaires forment une famille libre.*

Remarque 5. *Une sous-famille d'une famille libre est libre.*

Exercice 17. *Montrer que* $(\sin, \cos)$ *est une famille libre de* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*.*

Propriété 8. *Une famille* $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_p)$ *de* p *vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *est libre si et seulement si* $\sum_{k=1}^{k=p} \lambda_k \overrightarrow{u}_k = \overrightarrow{0}$ *avec* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ *implique* $\lambda_k = 0$ *pour tout* $k \in [\![1;p]\!]$*.*

Exercice 18. *La famille* $\left(\overrightarrow{e}_1\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_2\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_3\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}\right)$ *est-elle une famille libre ou liée de* $\mathbb{R}^3$ *?*

Exercice 19. *La famille* $(P_1 = 1 + X, P_2 = X + X^2, P_3 = X^2 + X^3, P_4 = 1 + X^3)$ *est-elle une famille libre ou liée de* $\mathbb{R}_3[X]$ *?*

3 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 8. *On appelle* **base** *d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *une famille libre et génératrice de* E*.*

Exemple 3. $\left(\overrightarrow{e}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \overrightarrow{e}_n\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$ *est une base dite* **base canonique** *de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^n$*.*

Exemple 4. $(1, X, X^2, X^3, \dots, X^n)$ *est une base dite* **base canonique** *de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}_n[X]$ *des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à* n*.*

Exemple 5. $(E_{kl})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant l\leqslant p}}$ *est une base dite* **base canonique** *de l'espace vectoriel* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *où* E_{kl} *est la matrice de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *dont tous les coefficients sont nuls excepté celui d'indice de ligne* k *et d'indice de colonne* l *qui est égal à* 1*.*

Exercice 20. *Montrer que* $\left(\begin{pmatrix}0&2\\3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*.*

Exercice 21. *On considère deux vecteurs* $\overrightarrow{e_1}$ *et* $\overrightarrow{e_2}$ *d'un espace vectoriel* E *et on pose* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2}$*,* $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2}$ *et* $\overrightarrow{w} = 5\overrightarrow{e_1} + 6\overrightarrow{e_2}$*.*

Montrer que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *est liée.*

Propriété 9. *On considère une famille $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_n)$ de n vecteurs génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors toute famille libre de E est formée d'au plus n vecteurs.*

Corollaire 1. *On considère une famille libre $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_n)$ de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors toute famille génératrice de E est formée d'au moins n vecteurs.*

Propriété 10. *Deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ont le même nombre de vecteurs.*

Définition 9. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une base est dit de* **dimension finie**, *on appelle* **dimension** *de l'espace vectoriel E et on note $\dim E$ le nombre de vecteurs d'une base de E.*

Remarque 6. *On convient que la dimension de l'espace vectoriel $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ est 0.*

Exercice 22. *Montrer que $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont des espaces vectoriels de dimension finie et déterminer leurs dimensions.*

Théorème 1. Théorème de la base extraite
De toute famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E on peut extraire une base de E.

Exercice 23. *Montrer que $\left(\overrightarrow{u_1}\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right), \overrightarrow{u_2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \overrightarrow{u_3}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \overrightarrow{u_4}\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ et en extraire une base.*

Corollaire 2. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une famille génératrice finie admet une base.*

Théorème 2. Théorème de la base incomplète
Toute famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie peut être complétée en une base de E.

Exercice 24. *Montrer que $\left(\overrightarrow{u_1}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right), \overrightarrow{u_2}\left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.*

Corollaire 3. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n alors :*
- *toute famille de n vecteurs génératrice de E est une base de E.*
- *toute famille libre de n vecteurs est une base de E.*

Exercice 25. *Montrer que $\left(\overrightarrow{e}_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.*

Propriété 11. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ alors pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ il existe un unique n-uplet $\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}$ de scalaires tels que $\overrightarrow{u} = \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k \overrightarrow{e}_k$, les scalaires λ_k pour $k \in [\![1;n]\!]$ sont appelés* **coordonnées** *du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Exercice 26. *Déterminer les coordonnées du polynôme $P(X) = X^3 - 1$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.*

Exercice 27. *Montrer que $\mathcal{B}' = (1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, déterminer les coordonnées du polynôme $P(X) = X^3 - 1$ dans cette base.*

4 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Propriété 12. *Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie et* $\dim F \leqslant \dim E$ *de plus* $\dim F = \dim E$ *si et seulement si* $E = F$.

Exercice 28. *Déterminer une base de* $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z=0 \right\}$.

Propriété 13. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène $\mathcal{S}$ à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension égale à $p - \mathrm{rg}(\mathcal{S})$.*

Propriété 14. *Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie admet un supplémentaire G et* $\dim F + \dim G = \dim E$.

Remarque 7. *Il n'y a pas unicité du supplémentaire.*

Exercice 29. *Déterminer un supplémentaire de* $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z=0 \right\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$.

Théorème 3. formule de Grassmann
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie alors $F+G$ et $F \cap G$ sont de dimension finie et $\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}$.

Exercice 30. *On considère* $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z=0 \right\}$ *et* $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x-y+z=0 \right\}$, *montrer que* $F+G = \mathbb{R}^3$.

Corollaire 4. *Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie sont supplémentaires si et seulement si* $F \cap G = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$ *et* $\dim F + \dim G = \dim E$.

Remarque 8. *On a également F et G supplémentaires si et seulement si $F+G=E$ et* $\dim F + \dim G = \dim E$.

Définition 10. *On appelle* **rang** *d'une famille de vecteurs la dimension de l'espace vectoriel engendré par celle-ci, on note* $\mathrm{rg}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p}) = \dim(\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p}))$.

Remarque 9. *On a* $\mathrm{rg}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p}) \leqslant p$.

Exercice 31. *Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer* $\mathrm{rg}\left(\overrightarrow{u}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{u}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Propriété 15. *Une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie est libre si et seulement si son rang est égal à son nombre de vecteurs.*

Propriété 16. *Une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie est génératrice de E si et seulement si son rang est égal à la dimension de E.*

Remarque 10. *Nous verrons dans le chapitre XIV que le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de la matrice de ses coordonnées dans une base quelconque.*

Exercices supplémentaires

Exercice 32

Montrer que l'ensemble des polynômes s'annulant en 1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 33

Montrer que l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' = t^2 y$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 34

Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'ensemble des matrices inversibles est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 35

Montrer que l'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

L'ensemble des suites réelles qui divergent vers $+\infty$ est-il un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles ?

Exercice 36

Montrer que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 37

L'ensemble des fonctions monotones est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Exercice 38

Montrer que l'ensemble F des polynômes divisibles par $X - 1$ et l'ensemble G des polynômes divisibles par $X + 1$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 39 ($\star$)

Montrer que l'ensemble F des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $t^2 y'' - 2y = 0$ et l'ensemble G des fonctions polynomiales sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 40

Montrer que l'ensemble F des fonctions linéaires et l'ensemble G des fonctions constantes sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer $F + G$.

Exercice 41

Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \ / \ t \in \mathbb{R} \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} \ / \ t \in \mathbb{R} \right\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer $F + G$, la somme $F + G$ est-elle directe ?

Exercice 42 ($\star$)

Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P(0) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P'(0) = 0\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer $F + G$, la somme $F + G$ est-elle directe ?

Exercice 43

Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ / \ x + y = 0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ / \ x - y = 0 \right\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 44 ($\star$)

Montrer que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 45 ($\star$)

Montrer que l'ensemble des fonctions constantes et l'ensemble des fonctions s'annulant en 0 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 46 ($\star$)

Montrer que l'ensemble des fonctions linéaires et l'ensemble des fonctions s'annulant en 1 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 47

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, déterminer $\mathrm{Vect}(1, i)$.

Exercice 48

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, déterminer $\mathrm{Vect}(x \mapsto \cos\left(x + \frac{k\pi}{4}\right), k \in [\![0; 7]\!])$.

Exercice 49

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$, déterminer $\mathrm{Vect}(1 + 2X, 1 + 2X^2)$.

Exercice 50

Montrer que $\left(\overrightarrow{e_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 51 ($\star\star$)

Déterminer les valeur de a pour lesquelles la famille $\left(\overrightarrow{e_1} \begin{pmatrix} a \\ 1-a \\ 1-a \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} \begin{pmatrix} 1-a \\ a \\ 1-a \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_3} \begin{pmatrix} 1-a \\ 1-a \\ a \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 52

La famille $\left(\overrightarrow{e_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_3} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$ est-elle libre ?

Exercice 53

$(1+X, X+X^2, 1+X^2)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 54 ($\star$)

$((X-1)(X-2), (X-2)(X-3), (X-1)(X-3))$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 55 ($\star$)

Montrer que si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une famille libre alors $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}+\overrightarrow{w})$ est une famille libre.

Exercice 56 ($\star$)

Montrer que $(1, 1+X, 1+X+X^2, \dots, 1+X+X^2+\cdots+X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 57

Donner une base de $\mathbb{C}^3$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel puis en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 58

La famille $(1+X, X+X^2, X^2+X^3, 1+X^3)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 59

Montrer que l'ensemble des fonctions à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle $y''-2y'+2y=0$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en déterminer une base.

Exercice 60

Montrer que $\left(1+X+X^2, 1+X-X^2, 1-X+X^2, 1-X-X^2\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$, en extraire une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 61

Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P''(0) = P'(0) + P(0)\}$ est un espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.

Exercice 62

Montrer que $\left(1+X^2, 1-X^2\right)$ est une famille libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 63

Montrer que $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer les coordonnées de la matrice identité I_2 dans cette base.

Exercice 64

Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x+2y+3z=0 \right\}$ puis la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 65

Déterminer un supplémentaire de $\text{Vect}(1+X+X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 66

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\operatorname{Ker} M$ et $\operatorname{Im} M$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 67

Trouver le rang de la famille de vecteurs $(1+X, 1-X, 1+X^2, 1-X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 68 ($\star$)

Dans $\mathcal{F}(]-1;1[,\mathbb{R})$, on considère les fonctions $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ et $f_4 : x \mapsto \dfrac{x}{1-x^2}$.

Déterminer le rang de la famille de vecteurs (f_1, f_2, f_3, f_4).

Exercice 69 ($\star\star$)

Montrer que l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est un espace vectoriel de dimension finie et en déterminer une base.

Réponses

1) On remarque que la fonction nulle est dérivable et qu'une combinaison linéaire de fonctions dérivables est une fonction dérivable.

2) On remarque que la marice nulle est une matrice carrée diagonale de taille n et on montre qu'une combinaison linéaire de matrices carrées diagonales de taille n est une matrice carrée diagonale de taille n.

3) On remarque que la somme des coordonnées du vecteur nul est nulle et on montre qu'étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dont la somme des coordonnées est nulle alors la somme des coordonnées du vecteur $\lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v}$ est nulle également.

4) On montre que la fonction nulle est solution de l'équation différentielle et qu'étant données deux solutions y_1 et y_2 de l'équation différentielle alors $y = \lambda.y_1 + \mu.y_2$ est également solution de l'équation différentielle.

5) On remarque que le polynôme nul n'est pas un polynôme de degré 3.

6) On remarque que le polynôme nul est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 et on montre qu'une combinaison linéaire de polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 3 est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

7) On remarque que F et G sont des ensembles de solutions de systèmes linéaires homogènes à trois inconnues et que $F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

8) Les vecteurs $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiennent à $F \cup G$ mais pas leur somme.

9) $F + G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

10) On montre que le système $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ d'inconnues x et y admet une unique solution.

11) On montre que $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ implique $x = y = 0$.

12) On considère $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

13) Le système $\lambda P + \mu Q = aX^2 + bX + c$ d'inconnues λ et μ est compatible si et seulement si $3a - b - 2c = 0$.

14) On montre que le système linéaire $\lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2} + \nu\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{u}$ n'est pas compatible.

15) On montre que le système linéaire $\lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3 + \omega P_4 = aX^3 + bX^2 + cX + d$ est compatible.

16) On procède par l'absurde et on considère un polynôme de degré strictement supérieur aux degrés des polynômes de la famille génératrice.

17) On montre que les fonctions sin et cos ne sont pas proportionnelles.

18) On montre que le système linéaire $\lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2} + \nu\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}$ admet une unique solution nulle.

19) On montre que $P_4 = P_1 - P_2 + P_3$.

20) On montre que la famille est libre et génératrice.

21) On montre que $\overrightarrow{u} = -8\overrightarrow{v} + 5\overrightarrow{w}$.

22) Les dimensions sont n, $n+1$ et np en considérant les bases canoniques.

23) On remarque que $\overrightarrow{u_3} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{u_1} + \frac{3}{2}\overrightarrow{u_2}$ et que $\overrightarrow{u_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u_1} + \frac{3}{2}\overrightarrow{u_2}$ et on montre que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est une base.

24) On considère $\overrightarrow{u_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

25) L'espace est de dimension 2 et la famille est libre et comprend deux vecteurs.

26) $P(X) = (-1).1 + 0.X + 0.X^2 + 1.X^3$.

27) $P(X) = (-1).1 + 0.(1+X) + (-1).(1+X+X^2) + 1.(1+X+X^2+X^3)$.

28) On remarque que $F = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ / \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

29) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R} \right\}$.

30) On remarque que $\dim(F+G) = 2+2-1 = 3$.

31) 2 en remarquant que $\overrightarrow{u_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ non colinéaires.

32) On remarque que le polynôme nul s'annule en 1 et qu'une combinaison linéaire de polynômes qui s'annulent en 1 est un polynôme qui s'annule en 1.

33) On remarque que la fonction nulle est solution de l'équation différentielle et qu'une combinaison linéaire de solutions de l'équation différentielle est également une solution de l'équation différentielle.

34) On remarque que la matrice nulle n'est pas inversible.

35) On remarque que la suite nulle n'est pas une suite qui diverge vers $+\infty$.

36) On remarque que la fonction nulle est une fonction paire et qu'une combinaison linéaire de fonctions paires est une fonction paire, on remarque que la fonction nulle est une fonction impaire et qu'une combinaison linéaire de fonctions impaires est une fonction impaire.

37) Si f est la fonction identité et g la fontion cube, $f-g$ n'est pas monotone.

38) $F \cap G$ est l'ensemble des polynômes divisibles par $X^2 - 1$.

39) $F \cap G = \{t \mapsto at^2 \ , \ a \in \mathbb{R}\}$.

40) $F + G$ est l'ensemble des fonctions affines.

41) $F \oplus G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x - y + z = 0 \right\}$.

42) $F + G = \mathbb{R}[X]$ car $P(X) = (P(X) - P(0)) + P(0)$, on remarque que la somme n'est pas directe en considérant le polynôme $P(X) = X^2$.

43) On remarque que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \end{pmatrix}$.

44) On remarque que $f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ et que la seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle.

45) On remarque que $f(x) = f(0) + [f(x) - f(0)]$ et qu'une fonction constante s'annulant en 0 est nulle.

46) On remarque que $f(x) = f(1)x + [f(x) - f(1)x]$ et qu'une fonction linéaire s'annulant en 1 est nulle.

47) $\mathrm{Vect}(1, i) = \mathbb{C}$.

48) $\mathrm{Vect}(\cos, \sin)$.

49) On obtient l'ensemble des polynômes $aX^2 + bX + c$ tels que $a + b = 2c$.

50) On montre que le système linéaire $\lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2} + \nu\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{u}$ est compatible.

51) La famille est génératrice pour $a \neq \frac{1}{2}, 2$.

52) On a $\overrightarrow{e}_3 = 2\overrightarrow{e}_2 - \overrightarrow{e}_1$.

53) Le système linéaire $\lambda(1+X) + \mu(X+X^2) + \nu(1+X^2) = 0$ admet pour unique solution la solution nulle.

54) On recherche λ, μ et ν tels que $\lambda(X-1)(X-2) + \mu(X-2)(X-3) + \nu(X-1)(X-3) = 0$ en utilisant la liberté de la famille $(1, X, X^2)$.

55) On recherche λ, μ et ν tels que $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \mu(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) + \nu(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = 0$ en utilisant la liberté de la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

56) On procède par récurrence en remarquant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} \lambda_k(1 + X + \cdots + X^k) = \sum_{k=1}^{k=n-1} \lambda_k(1 + X + \cdots + X^k) + (\lambda_n + \lambda_{n+1})(1 + X + \cdots + X^n) + \lambda_{n+1}X^{n+1}$.

57) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}\right\}$.

58) On remarque que $1+X^3=(1+X)-(X+X^2)+(X^2+X^3)$.

59) On montre que $(t\mapsto e^t\cos t, t\mapsto e^t\sin t)$ est une base.

60) On montre qu'en enlevant un des vecteurs, la famille devient libre et donc génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

61) On montre que (X^2+2X, X^2+2) est une base de E.

62) $\left(1+X^2, 1-X^2, X, X^3\right)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

63) $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=0.\left(\begin{smallmatrix}-1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)+\frac{1}{2}.\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\1&1\end{smallmatrix}\right)+\frac{1}{2}.\left(\begin{smallmatrix}1&1\\-1&1\end{smallmatrix}\right)+0.\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&-1\end{smallmatrix}\right)$.

64) $\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

65) $\mathbb{R}_1[X]$.

66) On montre que $\operatorname{Ker} M$ est de dimension 2, $\operatorname{Im} M$ de dimension 1 et $\operatorname{Ker} M\cap\operatorname{Im} M$ de dimension 0 puis on utilise la formule de Grassman.

67) Le rang est 3 en remarquant que $1=\frac{1}{2}(1+X)+\frac{1}{2}(1-X)$, $X=\frac{1}{2}(1+X)-\frac{1}{2}(1-X)$ et $X^2=\frac{1}{2}(1+X^2)-\frac{1}{2}(1-X^2)$.

68) On remarque que $f_3=\frac{1}{2}f_1+\frac{1}{2}f_2$ et $f_4=-\frac{1}{2}f_1+\frac{1}{2}f_2$.

69) On considère les suites $a_n=1$ et $b_n=2^n$ et on montre par récurrence que $u_n=(2u_0-u_1)a_n+(u_1-u_0)b_n$.