II. Nombres complexes

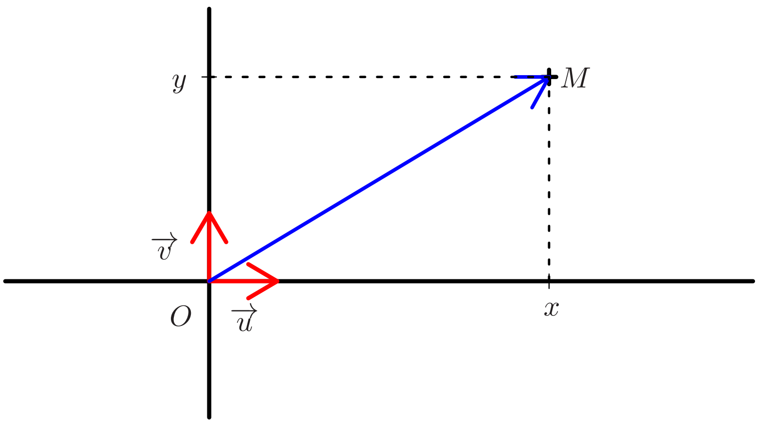
1 Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

Théorème 1. *Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ des* **nombres complexes** *qui possède les propriétés suivantes :*
- *$\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.*
- *$\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.*
- *$\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que $i^2 = -1$.*
- *tout nombre complexe z admet une unique écriture sous la forme $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, cette écriture est appelée* **forme algébrique** *du nombre z, le réel x est la* **partie réelle** *du nombre z notée $\mathcal{R}e(z)$ et le réel y est la* **partie imaginaire** *du nombre z notée $\mathcal{I}m(z)$. Si $y = 0$ le nombre z est dit* **réel** *et si $x = 0$ le nombre z est dit* **imaginaire pur**.

Exercice 1. *Calculer la forme algébrique du nombre complexe $z = 3 - (2 + i)(1 - 3i)$.*

Définition 1. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ on représente le nombre complexe $z = x + iy$ par :*
- *Le point $M(x; y)$.*
- *Le vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$*

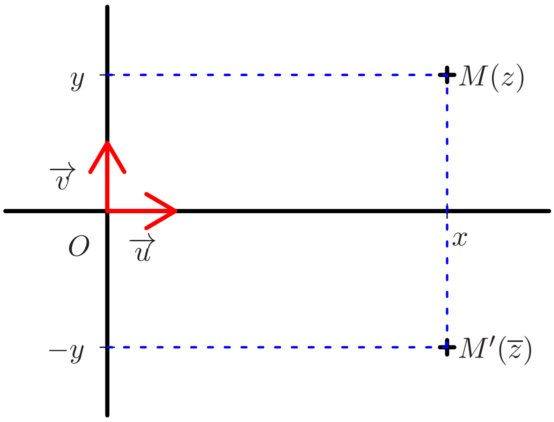
Le plan est alors appelé **plan complexe**, *l'axe des abscisses est appelé* **axe des réels** *et l'axe des ordonnées* **axe des imaginaires purs**, *le nombre complexe z est appelé* **affixe** *du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.*



Exercice 2. *Représenter dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = -1 - 4i$, $z_C = -3i$ et $z_D = -7$. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.*

Définition 2. *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, on appelle* **nombre complexe conjugué** *de z le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$.*

Propriété 1. *Soit z un nombre complexe, les points M et M' du plan complexe d'affixes respectives z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.*



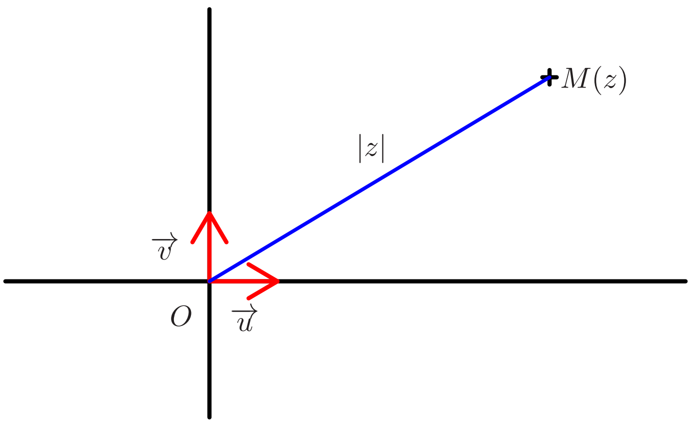
Exercice 3. *Calculer la forme algébrique du nombre complexe $z = \dfrac{3-i}{1+2i}$. (on pourra multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur)*

Propriété 2. *Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a :*

- $\boxed{\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}}$
- $\boxed{\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}}$
- $\boxed{\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}}$
- *pour* $z_2 \neq 0$, $\boxed{\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}}$

Définition 3. *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, on appelle* **module** *de z le nombre réel $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Propriété 3. *Soit z un nombre complexe et M son point image dans le plan complexe alors $OM = |z|$.*



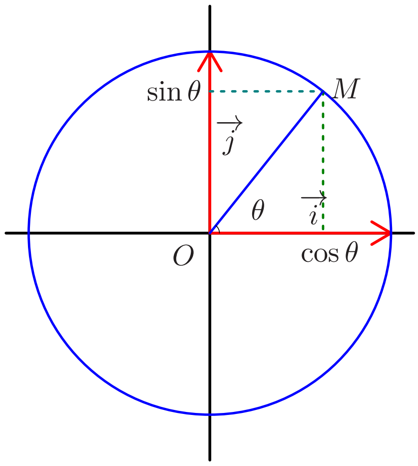
Exercice 4. *Dans le plan complexe, on considère deux points A et B d'affixes respectives z_A et z_B. Interpréter géométriquement $|z_B - z_A|$.*

Propriété 4. *Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a :*

- $\boxed{z\overline{z} = |z|^2}$
- $\boxed{|\overline{z}| = |z|}$
- $\boxed{|-z| = |z|}$
- $\boxed{|z| = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad z = 0}$
- $\boxed{|z_1 z_2| = |z_1||z_2|}$
- *pour* $z \neq 0$, $\boxed{\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}}$
- *pour* $z_2 \neq 0$, $\boxed{\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}}$
- $\boxed{|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$ *(inégalité triangulaire)*

2 Écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul

2.1 Trigonométrie



Définition 4. *Le plan étant muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère un point M du cercle de centre O et de rayon 1 et on note $\theta = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$. La fonction de $\mathbb{R}$ dans $[-1;1]$ qui à θ associe l'abscisse du point M est appelée fonction* **cosinus** *et est notée* **cos** *et la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[-1;1]$ qui à θ associe l'ordonnée du point M est appelée fonction* **sinus** *et est notée* **sin**.

Propriété 5.

- *Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques :*

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } \boxed{\begin{array}{rcl} \cos(x+2\pi) & = & \cos(x) \\ \sin(x+2\pi) & = & \sin(x) \end{array}}$$

- *La fonction cosinus est* **paire** *et la fonction sinus est* **impaire** *:*

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } \boxed{\begin{array}{rcl} \cos(-x) & = & \cos(x) \\ \sin(-x) & = & -\sin(x) \end{array}}$$

Propriété 6. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a* $\boxed{(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1}$.

Exercice 5. *Exprimer $\cos(x+\pi)$, $\sin(x+\pi)$, $\cos(x+\frac{\pi}{2})$, $\sin(x+\frac{\pi}{2})$, $\cos(\frac{\pi}{2}-x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ en utilisant des symétries sur le cercle trigonométrique.*

Propriété 7. **Valeurs remarquables du cosinus et du sinus**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriété 8. *Soient a et b des nombres réels, alors :*

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b} \qquad \boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$$

Corollaire 1. *Soit x un nombre réel, alors :*

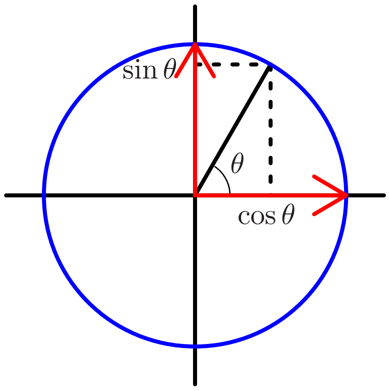
$$\boxed{\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 2(\cos x)^2 - 1 = 1 - 2(\sin x)^2} \qquad \boxed{\sin(2x) = 2 \sin x \cos x}$$

Exercice 6. *Exprimer $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$ et $\sin b$.*

Exercice 7. *Factoriser $\cos p + \cos q$ en posant $p = a+b$ et $q = a-b$.*

2.2 Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

Propriété 9. *Tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire sous la forme $\cos\theta + i\sin\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, θ étant défini de manière unique à 2π près.*



Propriété 10. *On note $z_\theta = \cos\theta + i\sin\theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, alors $\overline{z_\theta} = z_{-\theta} = \dfrac{1}{z_\theta}$ et pour tous α et β appartenant à $\mathbb{R}$ on a $z_\alpha z_\beta = z_{\alpha+\beta}$.*

Définition 5. *Par analogie avec l'exponentielle réelle, on note désormais $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.*

Exercice 8. *Calculer $e^{i\pi}$ (formule d'Euler), calculer $e^{in\pi}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.*

Propriété 11. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors :*

- $\boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$ $\boxed{\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$ *(formules d'Euler)*
- $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$ *(formule de Moivre)*

Exercice 9. *Montrer en utilisant les formules d'Euler que $(\cos x)^2 = \dfrac{\cos(2x)+1}{2}$.*

Exercice 10. *Montrer en utilisant la formule de Moivre pour $n = 2$ que $\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$.*

Propriété 12. *formulaire de trigonométrie*

- $\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$
  $\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$
  (ces formules se retrouvent à partir de l'égalité $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$)
- $\boxed{\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 2(\cos x)^2 - 1 = 1 - 2(\sin x)^2}$
  $\boxed{\sin(2x) = 2 \sin x \cos x}$
  (ces formules se retrouvent à partir de l'égalité $\left(e^{ix}\right)^2 = e^{2ix}$)

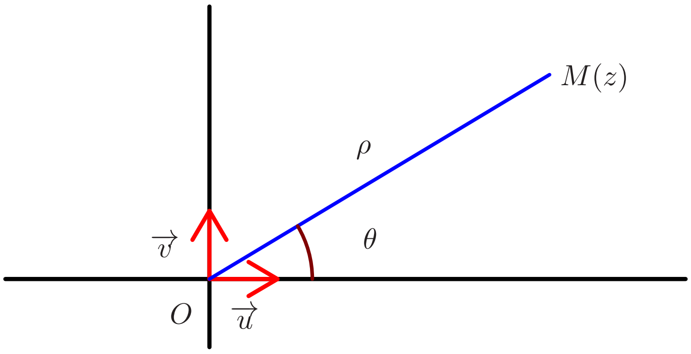
2.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Propriété 13. *Tout nombre complexe $z = x + iy$ non nul peut s'écrire de manière unique sous la* **forme trigonométrique** *$z = \rho e^{i\theta}$ avec ρ un réel strictement positif et θ un réel défini à 2π près. De plus on a :*

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Le réel θ est appelé **argument** *du nombre complexe z et noté $\arg(z)$.*

Propriété 14. *Soit $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ un nombre complexe et M son point image dans le plan complexe alors le couple (ρ, θ) représente les coordonnées polaires du point M.*



Exercice 11. *On considère le nombre complexe $z = 1 + i$. Écrire z sous forme trigonométrique, en déduire la forme algébrique de z^{100}.*

Exercice 12. *On considère les nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$. Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique, en déduire les modules et arguments de $z_1 \times z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$.*

Propriété 15. *Soient z, z_1 et z_2 trois nombres complexes non nuls, alors :*

- $\boxed{\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg(-z) = \arg(z) + \pi \ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg(z^n) = n \times \arg(z) \ [2\pi] \quad , \quad n \in \mathbb{Z}}$

2.4 Racines n-ièmes de l'unité

Propriété 16. *L'équation $z^n = 1$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ admet n solutions appelées* **racines n-ièmes de l'unité** *et s'exprimant sous la forme $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.*

Remarque 1. *On note $\mathbb{U}_n = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.*

Exercice 13. *Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de l'unité et les représenter dans le plan complexe.*

Exercice 14. *Déterminer sous forme algébrique les racines cubiques de l'unité et les représenter dans le plan complexe.*

Exercice 15. *Déterminer sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité et les représenter dans le plan complexe.*

Propriété 17. *L'équation $z^n = re^{i\alpha}$ avec $z \in \mathbb{C}$, $r \in]0; +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ admet n solutions s'exprimant sous la forme $z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.*

Exercice 16. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8i$.*

Exercice 17. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -16$.*

2.5 Exponentielle complexe

Définition 6. *On appelle* **exponentielle complexe** *d'un nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y réels : $e^z = e^x e^{iy}$.*

Remarque 2. *Cette définition est compatible avec l'exponentielle d'un réel et l'exponentielle d'un nombre imaginaire pur et conserve de nombreuses propriétés.*

Exercice 18. *Déterminer la forme algébrique de $e^{i-\sqrt{3}}$.*

Propriété 18. *Soit z, z_1 et z_2 des nombres complexes et n un entier relatif, alors :*

- $\boxed{e^z \neq 0}$
- $\boxed{e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}}$
- $\boxed{e^{\overline{z}} = \overline{e^z}}$
- $\boxed{e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}}$
- $\boxed{e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}}$
- $\boxed{(e^z)^n = e^{nz}}$

3 Équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

3.1 Racines carrées d'un nombre complexe non nul

Définition 7. *On appelle* **racine carrée** *d'un nombre complexe Z, un nombre complexe z dont le carré est égal à Z.*

Remarque 3. *Dans le cas où le nombre est réel, cette définition est incompatible avec celle de la fonction racine carrée.*

Propriété 19. *Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.*

Propriété 20. *Les racines carrées d'un nombre complexe $Z = a + ib$ sont les nombres $z = x + iy$ avec x et y solutions du système :*

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{R}e(z^2) & = & \mathcal{R}e(Z) \\ \mathcal{I}m(z^2) & = & \mathcal{I}m(Z) \\ |z^2| & = & |Z| \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - y^2 & = & a \\ 2xy & = & b \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{a^2 + b^2} \end{array} \right.$$

Exercice 19. *Déterminer les racines carrées du nombre complexe $5 + 12i$.*

3.2 Résolution des équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

Théorème 2. *Étant donnés trois nombres complexes a, b, c avec $a \neq 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ admet :*

- *Si $\Delta = 0$, une solution complexe $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$ de plus $az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$.*
- *Si $\Delta \neq 0$, deux solutions complexes $z_1 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$ avec $\delta^2 = \Delta$ de plus $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.*

Exercice 20. *On considère l'équation du second degré $z^2 + (1 + 6i)z - 10 = 0$.*

Déterminer le discriminant Δ de cette équation puis calculer ses racines carrées complexes δ_1 et δ_2, en déduire les solutions de l'équation $z^2 + (1 + 6i)z - 10 = 0$.

Corollaire 2. *L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c trois réels et $a \neq 0$ admet pour $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ deux racines complexes distinctes conjuguées $x_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ de plus $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$*

Exercice 21. *Déterminer les solutions de l'équation $x^2 - 2x + 5 = 0$.*

Exercices supplémentaires

Exercice 22

Calculer la forme algébrique du nombre complexe $z = (1-i)(1-2i)(1-3i)$.

Exercice 23 ($\star\star$)

Calculer la forme algébrique du nombre complexe $z = (1+i)(1+2i)^2(1+3i)^3$.

Exercice 24

Dans le plan complexe, on considère un point M quelconque d'affixe z. Exprimer en fonction de $\overline{z}$, l'affixe du symétrique M' du point M par rapport à l'axe des imaginaires purs.

Exercice 25 ($\star$)

Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $(2+i)z + (2-i)\overline{z} = 2$.

Exercice 26

Calculer la forme algébrique du nombre complexe $z = \dfrac{1}{1-i} + \dfrac{2}{1-2i} + \dfrac{3}{1-3i}$.

Exercice 27 ($\star$)

Calculer la forme algébrique du nombre complexe $z = 1 + \dfrac{i}{2 + \dfrac{i}{3}}$.

Exercice 28

Calculer le module du nombre complexe $z = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 29 ($\star$)

Dans le plan complexe, déterminer graphiquement l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $|1+i+z| = 2$.

Exercice 30 ($\star\star$)

Simplifier $|z+1|^2 + |z-1|^2$ pour z un nombre complexe de module 1.

Exercice 31

Simplifier $\cos(5\pi + x)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$, $\sin(3\pi - x)$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$ en utilisant les symétries du cercle trignonométrique.

Exercice 32

Déterminer les mesures principales[1] associées aux mesures $\dfrac{15\pi}{2}$, $\dfrac{34\pi}{7}$ et $-\dfrac{65\pi}{3}$.

Exercice 33

Déterminer les valeurs exactes des cosinus et sinus des réels $-\dfrac{5\pi}{3}$, $\dfrac{7\pi}{4}$ et $\dfrac{19\pi}{6}$.

1. mesures dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Exercice 34 ($\star$)

Résoudre l'équation $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ et l'inéquation $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 35 ($\star$)

Factoriser $\sin p + \sin q$ pour $p, q \in \mathbb{R}$.

Exercice 36 ($\star$)

Simplifier $\dfrac{\sin(3x)}{\sin x} - \dfrac{\cos(3x)}{\cos x}$ pour $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 37

Linéariser $(\cos x)^3$ puis $(\sin x)^3$ en utilisant les relations d'Euler.

Exercice 38 ($\star$)

Linéariser $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$ en utilisant les relations d'Euler.

Exercice 39 ($\star$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x + \cos(2x) = 0$.

Exercice 40 ($\star$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x + \sqrt{3}\sin x = -2$.

Exercice 41 ($\star\star$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\cos x + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) > 0$.

Exercice 42 ($\star\star\star$)

Factoriser $\cos\left(x - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{1}{2}\right)$, en déduire la valeur de la somme $S = \sin 1 + \sin 2 + \sin 3 + \cdots + \sin n$.

Exercice 43

Déterminer la forme trigonométrique de $1 - i\sqrt{3}$, en déduire la forme algébrique de $(1 - i\sqrt{3})^5$.

Exercice 44 ($\star\star$)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \overline{z}$.

Exercice 45

Déterminer sous forme trigonométrique les racines cinquièmes de l'unité et les représenter dans le plan complexe.

Exercice 46

Calculer dans $\mathbb{C}$ les racines cubiques de -8.

Exercice 47 ($\star$)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = i - 1$.

Exercice 48

Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $3 - 4i$.

Exercice 49 ($\star$)

Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $\dfrac{21}{4} - 5i$.

Exercice 50

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+i)z + 5i = 0$.

Exercice 51

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 1 = i(7 - 3z)$.

Exercice 52 ($\star$)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos\theta\ z + 1 = 0$ pour θ un réel quelconque.

Exercice 53 ($\star\star$)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 8iz^2 - 25 = 0$.

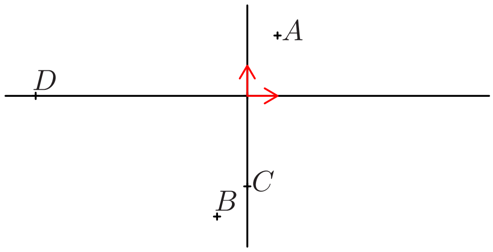
Exercice 54 ($\star\star\star$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$ en posant $x = u + v$ avec u et v des nombres complexes tels que $uv = 5$.

Réponses

1) $z = -2 + 5i$.

2) $z_{\overrightarrow{AB}} = -2 - 6i$.



3) $z = \dfrac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{5}i$.

4) $|z_B - z_A| = AB$.

5) $\cos(x+\pi) = -\cos x$, $\sin(x+\pi) = -\sin x$, $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$, $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$.

6) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ et $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

7) $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$.

8) $e^{i\pi} = -1$ et $e^{in\pi} = (-1)^n$.

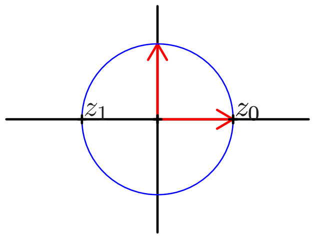
9) $(\cos x)^2 = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{i2x} + e^{-i2x} + 2}{4} = \dfrac{\cos(2x) + 1}{2}$.

10) $\cos(2x) = \mathcal{R}e\left((e^{ix})^2\right) = \mathcal{R}e\left((\cos x + i\sin x)^2\right) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$.

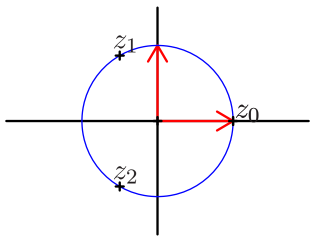
11) $z^{100} = (1+i)^{100} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{100} = 2^{50}e^{i25\pi} = -2^{50}$.

12) $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ et $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$.

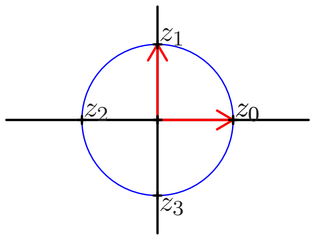
13) $z_0 = 1$ et $z_1 = -1$.



14) $z_0 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.



15) $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$ et $z_3 = -i$.



16) $\left\{\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}+i, -2i\right\}$.

17) $\left\{\sqrt{2}+i\sqrt{2}, -\sqrt{2}+i\sqrt{2}, -\sqrt{2}-i\sqrt{2}, \sqrt{2}-i\sqrt{2}\right\}$.

18) $e^{i-\sqrt{3}} = e^{i}e^{-\sqrt{3}} = e^{-\sqrt{3}}\cos 1 + ie^{-\sqrt{3}}\sin 1$.

19) $\{3+2i, -3-2i\}$.

20) $\Delta = 5+12i$, $\delta_1 = 3+2i$, $\delta_2 = -3-2i$, $z_1 = 1-2i$ et $z_2 = -2-4i$.

21) $\{1+2i, 1-2i\}$.

22) $z = -10$.

23) $z = 200+100i$.

24) $z_{M'} = -\overline{z}$.

25) Droite d'équation réduite $y = 2x-1$.

26) $z = \dfrac{6}{5} + \dfrac{11}{5}i$.

27) $z = \dfrac{40}{37} + \dfrac{18}{37}i$.

28) $|z| = 1$.

29) Cercle de centre d'affixe $-1-i$ et de rayon 2.

30) $|z+1|^2 + |z-1|^2 = 4$ si $z\overline{z} = 1$.

31) $\cos(5\pi + x) = -\cos x$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = \sin x$, $\sin(3\pi - x) = \sin x$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right) = -\sin x$.

32) $\dfrac{15\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, $\dfrac{34\pi}{7} = \dfrac{6\pi}{7}[2\pi]$ et $-\dfrac{65\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

33) $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\frac{19\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{19\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

34) Les ensembles de solutions sont $\left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}$ et $]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}[$.

35) $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$.

36) $\dfrac{\sin(3x)}{\sin x} - \dfrac{\cos(3x)}{\cos x} = 2$.

37) $(\cos x)^3 = \dfrac{3\cos x + \cos(3x)}{4}$ et $(\sin x)^3 = \dfrac{3\sin x - \sin(3x)}{4}$.

38) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right) = \dfrac{1+2\cos(2x)}{4}$.

39) $\cos x + \cos 2x = 2(\cos x)^2 + \cos x - 1$ d'où $x = \pi[2\pi]$ ou $x = \pm\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

40) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ d'où $x = -\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.

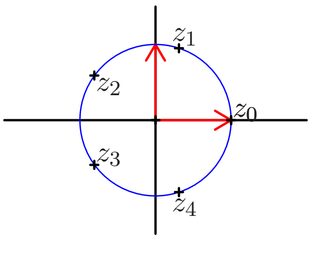
41) $\cos x + \cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ d'où $-\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

42) $S = \frac{\cos\frac{1}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}$.

43) $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ d'où $(1-i\sqrt{3})^5 = 16(1+i\sqrt{3})$.

44) 0, i, -1, $-i$ et 1 en utilisant l'écriture trigonométrique.

45) $z_0 = 1$, $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $z_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}$ et $z_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}}$.



46) $-2,\ 1+i\sqrt{3}$ et $1-i\sqrt{3}$.

47) $z=\frac{1}{2}\ln 2+i\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\ ,\ k\in\mathbb{Z}$.

48) $2-i$ et $-2+i$.

49) $\frac{5}{2}-i$ et $-\frac{5}{2}+i$.

50) $2-i$ et $-1+2i$.

51) $3-i$ et $1-2i$.

52) $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

53) $-1+2i,\ 1-2i,\ -2+i$ et $2-i$.

54) Les solutions sont 4, $-2+\sqrt{3}$ et $-2-\sqrt{3}$ en remarquant que u^3 est solution de l'équation $z^2-4z+125=0$ d'où $u^3=2\pm 11i$ soit $u=(2\pm i)e^{i(0,\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3})}$.