XII. Espaces vectoriels

1 Espaces vectoriels

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1. *On appelle* $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** *un ensemble* E *muni d'une* **addition** $+$ *et d'une* **multiplication par un scalaire** $.$ *telles que :*

- *l'addition est associative :*

$$\boxed{\text{pour tous } \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in E,\ \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}}$$

- *l'addition est commutative :*

$$\boxed{\text{pour tous } \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E,\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}}$$

- *il existe un vecteur nul* $\overrightarrow{0}$ *:*

$$\boxed{\text{pour tout } \overrightarrow{u} \in E,\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}}$$

- *tout vecteur de* E *admet un opposé :*

$$\boxed{\text{pour tout } \overrightarrow{u} \in E \text{ il existe } -\overrightarrow{u} \in E \text{ tel que } \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}}$$

- 1 *est un élément neutre pour la multiplication par un scalaire :*

$$\boxed{\text{pour tout } \overrightarrow{u} \in E,\ 1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}}$$

- *la multiplication par un scalaire est pseudo-associative :*

$$\boxed{\text{pour tous } \lambda, \mu \in \mathbb{K} \text{ et pour tout } \overrightarrow{u} \in E,\ (\lambda\mu).\overrightarrow{u} = \lambda.(\mu.\overrightarrow{u})}$$

- *la multiplication par un scalaire est distributive à droite par rapport à l'addition :*

$$\boxed{\text{pour tout } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et pour tous } \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E,\ \lambda.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda.\overrightarrow{u} + \lambda.\overrightarrow{v}}$$

- *la multiplication par un scalaire est distributive à gauche par rapport à l'addition :*

$$\boxed{\text{pour tous } \lambda, \mu \in \mathbb{K} \text{ et pour tout } \overrightarrow{u} \in E,\ (\lambda + \mu).\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{u}}$$

Exemple 1. *Exemples de* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels.*

- *ensemble* $\mathbb{R}^2$ *des vecteurs du plan*
- *ensemble* $\mathbb{R}^3$ *des vecteurs de l'espace*
- *ensemble* $\mathbb{R}^n$ *des vecteurs à* n *coordonnées réelles*
- *ensemble* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$
- *ensemble* $\mathbb{R}[X]$ *des polynômes à coefficients réels*
- *ensemble* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *des suites réelles*
- *ensemble* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *des matrices à coefficients réels à* n *lignes et* p *colonnes*

Exemple 2. *Exemples de* $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels.*

- *ensemble* $\mathbb{C}^n$ *des vecteurs à* n *coordonnées complexes*
- *ensemble* $\mathbb{C}[X]$ *des polynômes à coefficients complexes*
- *ensemble* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ *des matrices à coefficients complexes à* n *lignes et* p *colonnes*

Propriété 1. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ on a :*
- $0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
- $(-1).\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$

Démonstration. Exigible - On calcule $\overrightarrow{u} + 0.\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u} + (-1).\overrightarrow{u}$. □

Définition 2. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, .)$, on dit que $(F, +, .)$ est un* **sous-espace vectoriel** *de $(E, +, .)$ si $(F, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$.*

Remarque 1. $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ *et E sont des sous-espaces vectoriels de E.*

Propriété 2. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, .)$ alors $(F, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ si :*
- $F \subset E$
- $\overrightarrow{0} \in F$
- *F est* **stable par combinaisons linéaires** *: pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in F$ on a $\lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v} \in F$*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 1. *Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions dérivables est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Exercice 2. *Montrer que l'ensemble des matrices carrées diagonales de taille n à coefficients réels est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 3. *Montrer que* $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 0\right\}$ *est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, le représenter graphiquement.*

Propriété 3. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.*

Démonstration. Exigible - On utilise l'écriture matricielle. □

Exercice 4. *Montrer que l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Exercice 5. *L'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré 3 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?*

Propriété 4. *L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 6. *Montrer que* $F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y = 0\right\}$ *et* $G = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y = 0\right\}$ *sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, repésenter graphiquement F, G et $F \cap G$.*

Exercice 7. *L'union de deux sous-espaces vectoriels de E est-il un sous-espace vectoriel de E ?*

Définition 3. **Somme de sous-espaces vectoriels**
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on définit $\boxed{F + G = \{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \ / \ \overrightarrow{u} \in F \text{ et } \overrightarrow{v} \in G\}}$.

Propriété 5. *$F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 8. *On considère* $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = z = 0 \right\}$ *et* $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = z = 0 \right\}$*, déterminer* $F + G$*, représenter graphiquement* F*,* G *et* $F + G$*.*

Définition 4. Somme directe de sous-espaces vectoriels
On considère deux sous-espaces vectoriels F *et* G *de* E*, si pour tout* $\overrightarrow{w} \in F + G$ *il existe un unique couple* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F \times G$ *tel que* $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ *alors la somme* $F + G$ *est dite* directe *et notée* $F \oplus G$*.*

Exercice 9. *Montrer que la somme de l'exercice 8 est directe.*

Propriété 6. *Deux sous-espaces vectoriels* F *et* G *de* E *sont en somme directe si et seulement si* $F \cap G = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$.

Démonstration. Non exigible. □

Exercice 10. *Montrer en utilisant la propriété précédente que la somme de l'exercice 8 est directe.*

Définition 5. Sous-espaces vectoriels supplémentaires
Deux sous-espace vectoriels F *et* G *de* E *sont dits* supplémentaires *si* $F \oplus G = E$*.*

Exercice 11. *Déterminer deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de* $\mathbb{R}^3$*.*

2 Familles finies de vecteurs

Propriété 7. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs
Si $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_p)$ *est une famille de* p *vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *alors l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs* $\boxed{\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_p) = \{\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{u}_p \ / \ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}\}}$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de* E *contenant les vecteurs* $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_p$*.*

Démonstration. Exigible. □

Remarque 2.

- *Pour* $p = 0$*, on convient que* $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$.
- *Pour* $p = 1$ *et* $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}) = \{\lambda \overrightarrow{u} \ / \ \lambda \in \mathbb{K}\}$ *est appelé* **droite vectorielle** *engendrée par la vecteur* $\overrightarrow{u}$*.*
- *Pour* $p = 2$ *et* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *non colinéaires,* $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \{\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} \ / \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ *est appelé* **plan vectoriel** *engendré par les vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$*.*

Exercice 12. *On considère les polynômes* $P(X) = X^2 + X + 1$ *et* $Q(X) = 2X - 1$*, déterminer une condition nécessaire et suffisante sous la forme d'une relation entre* a, b *et* c *pour que le polynôme* $aX^2 + bX + c$ *appartienne à* $\mathrm{Vect}(P, Q)$*.*

Définition 6. *Si* $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_p)$ *est une famille de* p *vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *telle que* $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_p) = E$ *on dit qu'elle est* **génératrice** *de* E*.*

Exercice 13. *Montrer que* $\left(\overrightarrow{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^3$*.*

Exercice 14. *Déterminer une famille génératrice de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}_3[X]$ *des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à* 3*.*

Exercice 15. *L'espace vectoriel* $\mathbb{R}[X]$ *admet-il une famille génératrice ?*

Définition 7. *Une famille de vecteurs est dite* **libre** *si aucun de ses vecteurs ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres. Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite* **liée**.

Remarque 3. *Comme* $\text{Vect}(\varnothing) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$*, on convient que* $\left(\overrightarrow{0}\right)$ *n'est pas une famille libre.*

Remarque 4. *Deux vecteurs non colinéaires forment une famille libre, trois vecteurs non coplanaires forment une famille libre.*

Remarque 5. *Une sous-famille d'une famille libre est libre.*

Exercice 16. *Montrer que* $(\sin, \cos)$ *est une famille libre de* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Propriété 8. $\boxed{\text{Une famille } (\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_p) \text{ de } p \text{ vecteurs d'un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel } E \text{ est libre si et seulement si } \sum_{k=1}^{k=p} \lambda_k \overrightarrow{u}_k = \overrightarrow{0} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K} \text{ implique } \lambda_k = 0 \text{ pour tout } k \in [\![1;p]\!].}$

Démonstration. Non exigible. □

Exercice 17. *Montrer que* $\left(\overrightarrow{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 18. *Montrer que* $(1, X, X^2, X^3, \ldots, X^p)$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}[X]$.

3 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 8. *On appelle* **base** *d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *une famille libre et génératrice de* E.

Exemple 3. $\left(\overrightarrow{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \overrightarrow{e}_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ *est une base dite* **base canonique** *de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^n$.

Exemple 4. $(1, X, X^2, X^3, \ldots, X^n)$ *est une base dite* **base canonique** *de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}_n[X]$ *des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à* n.

Exemple 5. $(E_{kl})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant l \leqslant p}}$ *est une base dite* **base canonique** *de l'espace vectoriel* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *où* E_{kl} *est la matrice de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *dont tous les coefficients sont nuls excepté celui d'indice de ligne* k *et d'indice de colonne* l *qui est égal à* 1.

Exercice 19. *Montrer que* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Propriété 9. *On considère une famille* $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n)$ *de* n *vecteurs génératrice d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *alors toute famille libre de* E *est formée d'au plus* n *vecteurs.*

Démonstration. Non exigible - On montre qu'une famille de $n+1$ vecteurs est liée en obtenant une combinaison linéaire nulle par échelonnement-réduction d'un système linéaire de $n+1$ lignes de rang inférieur ou égal à n. □

Corollaire 1. *On considère une famille libre* $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n)$ *de* n *vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *alors toute famille génératrice de* E *est formée d'au moins* n *vecteurs.*

Démonstration. Exigible - On raisonne par l'absurde et on utilise la propriété 9. □

Propriété 10. *Deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre de vecteurs.*

Démonstration. Exigible - On utilise les propriétés 9 et 1. □

Théorème 1. Théorème de la base extraite
De toute famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E on peut extraire une base de E.

Démonstration. Procédé exigible. □

Exercice 20. *Montrer que* $\left(\overrightarrow{e_1}\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right), \overrightarrow{e_2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \overrightarrow{e_3}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \overrightarrow{e_4}\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$ *et en extraire une base.*

Corollaire 2. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une famille génératrice finie admet une base, on dit que l'espace vectoriel E est de* **dimension finie**, *on appelle* **dimension** *de l'espace vectoriel E et on note* $\dim E$ *le nombre de vecteurs d'une base de E.*

Démonstration. Exigible. □

Remarque 6. *On convient que la dimension de l'espace vectoriel* $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ *est* 0.

Exercice 21. *Montrer que* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$ *et* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *sont des espaces vectoriels de dimension finie et déterminer leurs dimensions.*

Théorème 2. Théorème de la base incomplète
Toute famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie peut être complétée en une base de E.

Démonstration. Procédé exigible. □

Exercice 22. *Montrer que* $\left(\overrightarrow{e_1}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right), \overrightarrow{e_2}\left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}^3$ *et la compléter en une base de* $\mathbb{R}^3$.

Corollaire 3. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n alors :*
- *toute famille de n vecteurs génératrice de E est une base de E.*
- *toute famille libre de n vecteurs est une base de E.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 23. *Montrer que* $\left(\overrightarrow{e}_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

Propriété 11. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie muni d'une base* $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ *alors pour tout vecteur* $\overrightarrow{u} \in E$ *il existe un unique n-uplet* $\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}$ *de scalaires tels que* $\overrightarrow{u} = \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k \overrightarrow{e}_k$, *les scalaires* λ_k *pour* $k \in [\![1;n]\!]$ *sont appelés* **coordonnées** *du vecteur* $\overrightarrow{u}$ *dans la base* $\mathcal{B}$.

Démonstration. Exigible - On utilise le fait que $\mathcal{B}$ est génératrice et libre. □

Exercice 24. *Déterminer les coordonnées du polynôme* $P(X) = X^3 - 1$ *dans la base canonique* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 25. *Montrer que* $\mathcal{B}' = (1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3)$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$, *déterminer les coordonnées du polynôme* $P(X) = X^3 - 1$ *dans cette base.*

4 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Propriété 12. *Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie et* $\dim F \leqslant \dim E$ *de plus* $\dim F = \dim E$ *si et seulement si* $E = F$.

Démonstration. Exigible - On remarque que si F n'est pas trivial, il admet un vecteur non nul qui forme une famille libre et on applique ensuite le procédé du théorème de la base incomplète. □

Exercice 26. *Déterminer une base de* $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \right\}$.

Propriété 13. *Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie admet un supplémentaire G et* $\dim F + \dim G = \dim E$.

Démonstration. Exigible - On utilise le théorème de la base incomplète. □

Remarque 7. *Il n'y a pas unicité du supplémentaire.*

Exercice 27. *Déterminer un supplémentaire de* $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \right\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$.

Théorème 3. formule de Grassmann
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie alors $F + G$ et $F \cap G$ sont de dimension finie et $\boxed{\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}$.

Démonstration. Non exigible - On complète une base de $F \cap G$ en une base de F puis en une base de G et on montre que la famille formée par l'ensemble des vecteurs de ces bases est une base de $F + G$. □

Corollaire 4. *Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie sont supplémentaires si et seulement si* $F \cap G = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$ *et* $\dim F + \dim G = \dim E$.

Démonstration. Exigible. □

Remarque 8. *On a également F et G supplémentaires si et seulement si $F + G = E$ et* $\dim F + \dim G = \dim E$.

Définition 9. *On appelle* **rang** *d'une famille de vecteurs la dimension de l'espace vectoriel engendré par celle-ci, on note* $\mathrm{rg}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p}) = \dim(\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p}))$.

Remarque 9. *On a* $\mathrm{rg}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p}) \leqslant p$.

Exercice 28. *Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer* $\mathrm{rg}\left(\overrightarrow{u}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{u}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Propriété 14. *Une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie est libre si et seulement si son rang est égal à son nombre de vecteurs.*

Démonstration. Exigible - On utilise le corollaire 3. □

Propriété 15. *Une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie est génératrice de E si et seulement si son rang est égal à la dimension de E.*

Démonstration. Exigible - On utilise la propriété 12. □

Remarque 10. *Nous verrons dans le chapitre XIV que le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de la matrice de ses coordonnées dans une base quelconque.*