IX. Suites

Exercice 1

On considère l'ensemble $E = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \ , \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$, déterminer s'ils existent son plus grand élément, son plus petit élément, sa borne supérieure et sa borne inférieure.

Exercice 2

Montrer qu'il existe une unique suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_7 = 6,8$ et $u_{19} = 23,6$. Déterminer alors u_{53}.

Exercice 3

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est géométrique. Déterminer $\sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Exercice 4

Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$.

Exercice 5

Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positive est géométrique si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = \sqrt{u_n u_{n+2}}$.

Exercice 6

Déterminer une forme explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_n & = & \sum_{k=0}^{k=n-1} u_k \ , \ n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$.

Exercice 7

Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{2^n + n}{3^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{1 + u_n} \ , \ n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$ est bornée.

Exercice 9

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{1+u_n}\ ,\ n\in\mathbb{N} \end{array}\right.$ est croissante.

Exercice 10

Déterminer en fonction de u_0 le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 11

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. (on pourra s'intéresser à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n=u_n-1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$)

Exercice 12

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs tels que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{3}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 13

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n=\dfrac{(-2)^n+3n}{3^n-2n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 14

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n=\dfrac{(n-1)\sin(n+1)-(n+1)\sin(n-1)}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 15

Étant donné un réel x, étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n=\dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 16

Démontrer que $x\geqslant\ln(1+x)$ pour $x\geqslant 0$, en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 17

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $0 \leqslant u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 18

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \frac{2}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sont adjacentes, en déduire qu'elles convergent vers une même limite $l \in [2;3]$.

Exercice 19

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est convergente.

(on pourra s'intéresser aux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$)

Exercice 20

Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{4^{n+1} + n^3}{2^n + n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21

Que penser de la notation $u_n = o(o(v_n))$?

Exercice 22

Montrer que $\sum_{k=1}^{k=n} k^3 = O(n^4)$.

Exercice 23

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{2n^2+1}{n^2+n+1} = \alpha + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 24

Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Réponses

1) $\max(E) = \sup(E) = \dfrac{3}{2}$ et $\inf(E) = -1$.

2) La suite est nécessairement la suite de raison $r = \dfrac{u_{19} - u_7}{19 - 7} = 1,4$ et de premier terme $u_0 = u_7 - 7r = -3$ d'où $u_{53} = -3 + 53r = 71,2$.

3) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1$.

4) Pour la condition suffisante, on remarque que $u_{n+1} - u_n$ est une constante.

5) Pour la condition suffisante, on remarque que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante.

6) On montre par récurrence que $u_n = 2^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

7) On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 - 2n - 2^n}{3^{n+1}} \leqslant 0$.

8) On montre par récurrence que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9) On montre par récurrence que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10) On montre que la suite est constante si $u_0 = 1$, minorée par 1 et strictement décroissante si $u_0 > 1$, majorée par 1 et strictement croissante si $u_0 < 1$.

11) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 car la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

12) Il existe un rang N tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{2}{3}$ pour tout $n \geqslant N$ d'où $u_n \leqslant u_N \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-N}$ pour tout $n \geqslant N$.

13) La suite converge vers 0 car $u_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n \dfrac{1 + \frac{3n}{(-2)^n}}{1 - \frac{2n}{3^n}}$.

14) La suite diverge car $u_n = 2\sin 1 \cos n - \dfrac{2\cos 1 \sin n}{n}$.

15) La suite converge vers x car $x - 10^{-n} < u_n \leqslant x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

16) On remarque que $u_n \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \ln(1+k) - \ln(k) = \ln(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

17) On procède par récurrence, la suite est croissante majorée par 2 donc elle converge vers $l \in [1;2]$.

18) On montre que les suites sont adjacentes et on remarque que $u_0 = 2$ et $v_0 = 3$.

19) Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

20) $u_n \sim 2^{n+2}$.

21) $u_n = o(v_n)$.

22) On remarque que $0 \leqslant \dfrac{1}{n^4} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k^3 \leqslant \dfrac{1}{n^4} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} n^3 = 1$.

23) $\dfrac{2n^2 + 1}{n^2 + n + 1} = 2 - \dfrac{2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

24) En utilisant l'expression conjuguée, on obtient $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$.