Devoir surveillé de Mathématiques n°1

N.B : L'élève attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un élève est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 (Racines n-ièmes de l'unité)

1. (a) Donner les formes algébriques des racines 3-ièmes de l'unité z_0, z_1 et z_2.
   (b) En déduire l'expression développée du polynôme $P_3(X) = (X - z_0)(X - z_1)(X - z_2)$.
2. (a) Donner les formes algébriques des racines 4-ièmes de l'unité z_0, z_1, z_2 et z_3.
   (b) En déduire l'expression développée du polynôme $P_4(X) = (X - z_0)(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$.

Exercice 2 (Lieux géométriques)

On se place dans le plan complexe. (on prendra pour unité graphique 8cm)

1. Déterminer puis représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{C}$ des points d'affixe z vérifiant l'équation $2iz\overline{z} + \overline{z} - z = 0$.
2. Déterminer puis représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{D}$ des points d'affixe z vérifiant l'équation $(1 + 2i)z + (1 - 2i)\overline{z} + 2 = 0$.
3. Montrer que l'affixe z des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ vérifie l'équation $5z^2 - 5iz - (2 + i) = 0$, en déduire l'affixe des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

Exercice 3 (Loi de Morrie)

1. (a) Démontrer que pour tout $\theta \in]0; \pi[$, on a $\dfrac{\sin(4\theta)}{\sin(\theta)} = 4\cos(\theta)\cos(2\theta)$.
   (b) En déduire que $\cos(\frac{\pi}{5})$ est solution de l'équation $(2x + 1)(4x^2 - 2x - 1) = 0$.
   (c) Déterminer la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{5})$.
2. (a) Démontrer que pour tout $\theta \in]0; \pi[$, on a $\dfrac{\sin(8\theta)}{\sin(\theta)} = 8\cos(\theta)\cos(2\theta)\cos(4\theta)$.
   (b) En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{9})\cos(\frac{2\pi}{9})\cos(\frac{4\pi}{9})$.

Exercice 4 (Polynômes de Tchebychev)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = \cos(n\theta)$ et $Q_n = \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$.

1. (a) Exprimer P_0, P_1, P_2 et P_3 en fonction de $X = \cos(\theta)$.
   (b) Exprimer Q_0, Q_1, Q_2 et Q_3 en fonction de $X = \cos(\theta)$.
2. (a) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n, Q_n et $X = \cos(\theta)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Exprimer Q_{n+1} en fonction de P_n, Q_n et $X = \cos(\theta)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Exprimer P_{n+2} en fonction de P_{n+1}, P_n et $X = \cos(\theta)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Exprimer Q_{n+2} en fonction de Q_{n+1}, Q_n et $X = \cos(\theta)$ pour $n \in \mathbb{N}$.