IX. Polynômes

1 Polynômes à une indéterminée

Définition 1. *On appelle* **polynôme d'indéterminée** X *à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *une expression de la forme* $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = \sum_{k=0}^{k=n} a_kX^k$ *où* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sont des nombres réels ou complexes appelés* **coefficients** *du polynôme* $P(X)$.

Exemple 1. $2X^2 - X + 1$ *et* $X^5 - 1$ *sont des polynômes.*

Remarque 1. *Le polynôme* $2X^2 - X + 1$ *et la fonction polynomiale* $f : x \mapsto 2x^2 - x + 1$ *sont des objets mathématiques distincts.*

Définition 2. *On appelle* **polynôme nul** *le polynôme* $P(X) = 0$, **polynôme unité** *le polynôme* $P(X) = 1$, **polynôme constant** *un polynôme de la forme* $P(X) = a_0$ *avec* a_0 *un nombre réel ou complexe et* **monôme** *un polynôme de la forme* $P(X) = a_kX^k$ *avec* a_k *un nombre réel ou complexe. On note* $\mathbb{R}[X]$ *l'ensemble des polynômes à coefficients réels et* $\mathbb{C}[X]$ *l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.*

Définition 3. *On appelle* **degré** *d'un polynôme non nul* $P(X) = a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots+a_nX^n = \sum_{k=0}^{k=n} a_kX^k$ *et on note* $\deg(P)$ *le plus grand indice* $k \in [\![0, n]\!]$ *tel que* $a_k \neq 0$, *on convient que* $\deg(0) = -\infty$. *Le coefficient du monôme de plus haut degré est appelé* **coefficient dominant** *du polynôme* $P(X)$, *un polynôme de coefficient dominant égal à* 1 *est dit* **unitaire**.

Exemple 2. $X^5 - 1$ *est un polynôme unitaire de degré* 5.

Définition 4. **Opérations sur les polynômes**

Étant donnés deux polynômes $P(X) = \sum_{k=0}^{k=n} a_kX^k$ *et* $Q(X) = \sum_{k=0}^{k=m} b_kX^k$ *et un scalaire* λ *réel ou complexe, on définit les polynômes :*

- $(\lambda P)(X) = \sum_{k=0}^{k=n} \lambda a_kX^k$
- $(P + Q)(X) = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} c_kX^k$ *où* $c_k = a_k + b_k$ *en convenant que* $a_k = 0$ *si* $k > n$ *et* $b_k = 0$ *si* $k > m$.
- $(P \times Q)(X) = \sum_{k=0}^{n+m} c_kX^k$ *où* $c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j = \sum_{i=0}^{i=k} a_ib_{k-i}$ *en convenant que* $a_k = 0$ *si* $k > n$ *et* $b_k = 0$ *si* $k > m$.

Remarque 2. *On admet que ces opérations sont associatives et commutatives et que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.*

Exercice 1. *On considère les polynômes* $P = X^2 + 1$ *et* $Q = X^3 + X$, *calculer le polynôme* $(P + Q)^2$.

Propriété 1. *On considère deux polynômes P et Q non nuls à coefficients réels ou complexes, alors* $\boxed{\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)}$.

Démonstration. Exigible - On montre que le coefficient dominant de $P \times Q$ est $a_n b_m$. □

Remarque 3. *Dans le cas où un des deux polynômes est nul, la propriété reste valable en convenant que* $(-\infty) + m = n + (-\infty) = -\infty$ *et* $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

Exercice 2. *Étant donnés deux polynômes P et Q non nuls à coefficients réels ou complexes, a-t-on* $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$ *?*

2 Arithmétique dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$

On se place désormais dans $\mathbb{K}[X]$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 5. *On considère $A, B \in \mathbb{K}[X]$. S'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = B \times C$ on dit que A est un* **multiple** *de B et que B est un* **diviseur** *de A.*

Remarque 4. *Un polynôme P non nul est divisible par les polynômes λ et λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.*

Exercice 3. *Que peut-on dire du degré des diviseurs d'un polynôme non nul ?*

Exercice 4. *Déterminer les diviseurs de $X^3 + X$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.*

Propriété 2. Division euclidienne
On considère $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$ alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que $A = B \times Q + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$, les polynômes Q et R sont respectivement appelés **quotient** *et* **reste** *de la* **division euclidienne** *de A par B.*

Démonstration. Non exigible - On montre l'unicité par un raisonnement sur les degrés et l'existence par récurrence forte sur $p = n - m = \deg(A) - \deg(B)$. □

Remarque 5. *Le reste de la division euclidienne de A par B est nul si et seulement si B divise A.*

Exercice 5. *Effectuer la division euclidienne du polynôme $X^5 + 2X^2 - X + 2$ par le polynôme $X^2 + 1$.*

3 Racines d'un polynôme

Définition 6. *À tout polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots a_n X^n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$ on peut associer une fonction polynomiale*

$$\widetilde{P} : \begin{array}{ccl} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k \end{array}.$$

Remarque 6. *L'application qui à P associe $\widetilde{P}$ est un morphisme car $\widetilde{(\lambda P)} = \lambda \widetilde{P}$, $\widetilde{(P + Q)} = \widetilde{P} + \widetilde{Q}$ et $\widetilde{(P \times Q)} = \widetilde{P} \times \widetilde{Q}$.*

Nous montrerons plus loin que cette application est bijective ce qui nous permettra d'indentifier un polynôme avec sa fonction polynomiale associée, pour cette raison on notera désormais $\widetilde{P} = P$.

Définition 7. *On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une* **racine** *du polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}$ si $P(\alpha) = 0$.*

Exercice 6. *Déterminer les racines du polynôme $X^3 + X$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$.*

Propriété 3. *Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ admet $\alpha \in \mathbb{K}$ pour racine si et seulement si il est divisible par $X - \alpha$.*

Démonstration. Exigible - On remarque que le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ est $P(\alpha)$. □

Exercice 7. *Déterminer les racines réelles du polynôme $X^3 - 2X + 1$. (on pourra chercher une racine évidente)*

Définition 8. *Étant donnée une racine α d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, on définit son* **ordre de multiplicité** *comme le plus grand entier m tel que $(X - \alpha)^m$ divise P.*

Remarque 7. *L'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme P non nul est un entier compris entre 1 et $\deg(P)$.*

Exercice 8. *Montrer que 1 est une racine du polynôme $X^4 - X^3 - X + 1$ et déterminer son ordre de multiplicité.*

Propriété 4. *Si un polynôme admet p racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ d'ordres de multiplicité respectifs $m_1, m_2, \dots, m_p$ alors P est divisible par $(X - \alpha_1)^{m_1}(X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_p)^{m_p}$.*

Démonstration. Non exigible - On prouve que si $P = (X - \alpha_1)^{m_1} Q$ alors $\alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont racines de Q d'ordres de multiplicité $m_2, \dots, m_p$. □

Corollaire 1. *Un polynôme non nul de degré n possède au plus n racines comptées avec leur ordre de multiplicité.*

Démonstration. Exigible. □

Exemple 3. *Le polynôme $(X-1)(X-2)^2$ de degré 3 admet 1 et 2 pour racines et leurs ordres de multiplicité sont 1 et 2 donc il admet 3 racines en comptant avec leurs ordres de multiplicité.*

Exercice 9. *Déterminer un polynôme de degré 3 tel que la somme des ordres de multiplicité de ses racines réelles soit strictement inférieure à 3.*

Corollaire 2. *Un polynôme admettant une infinité de racines distinctes est nul.*

Démonstration. Exigible. □

Corollaire 3. *L'application qui à un polynôme associe sa fonction polynomiale est injective.*

Démonstration. Exigible - On remarque que si $\widetilde{P} = \widetilde{Q}$ alors $P - Q$ admet une infinité de racines. □

Ce dernier résultat permet comme annoncé précédemment d'identifier un polynôme avec sa fonction polynomiale associée, une fonction polynomiale est donc nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls et deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients.

4 Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles

Définition 9. *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit* **irréductible** *dans $\mathbb{K}[X]$ s'il est de degré supérieur ou égal à 1 et si ses seuls diviseurs sont les polynômes λ et λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.*

Remarque 8. *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 1 est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.*

Remarque 9. *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 admettant une racine dans $\mathbb{K}$ est réductible dans $\mathbb{K}[X]$.*

Exercice 10. *Montrer que le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais réductible dans $\mathbb{C}[X]$.*

Exercice 11. *Déterminer un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ réductible dans $\mathbb{R}[X]$ qui n'admet pas de racine réelle.*

Théorème 1. *Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 se décompose de manière unique en produit d'une constante non nulle et de polynômes irréductibles unitaires à l'ordre des facteurs près.*

Démonstration. Hors programme. □

Exercice 12. *Décomposer le polynôme $4X^3 - 4X^2 + X - 1$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.*

Théorème 2. Théorème fondamental de l'algèbre

$\boxed{\text{Tout polynôme de } \mathbb{C}[X] \text{ de degré supérieur ou égal à 1 admet au moins une racine dans } \mathbb{C}.}$

Démonstration. Hors programme. □

Corollaire 4. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.*

Démonstration. Exigible. □

Corollaire 5. *Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ peut s'écrire sous la forme $P(X) = \lambda(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\dots(X-\alpha_p)^{m_p}$ avec λ un nombre complexe et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ des nombres complexes distincts, on dit que P est un* **polynôme scindé**.

Démonstration. Exigible. □

Remarque 10. *Si P est non nul, on a $m_1 + m_2 + \dots + m_p = \deg(P)$.*

Exercice 13. *Décomposer le polynôme $X^3 + X^2 + X + 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.*

Exercice 14. *Décomposer le polynôme $X^n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.*

Propriété 5. Somme et produit des racines d'un polynôme scindé

On considère un polynôme de degré $n \geqslant 1$ scindé $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n = \lambda(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_n)$ alors $\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}}$ *et* $\boxed{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n = (-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}}$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 15. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système* $\left\{\begin{array}{lcl} \alpha + \beta & = & 5 \\ \alpha \times \beta & = & 3 \end{array}\right.$.

Propriété 6. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, si α est une racine complexe de P alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P avec la même multiplicité.*

Démonstration. Exigible - On remarque que $\overline{P(\alpha)} = P(\overline{\alpha})$ car les coefficients de P sont réels. □

Propriété 7. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de dégré 2 n'admettant pas de racine réelle.*

Démonstration. Exigible - Un polynôme de degré supérieur ou égal à 3 admet une racine complexe α donc est divisible par $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$. □

Propriété 8. *Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ peut s'écrire sous la forme $P(X) = \lambda(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\dots(X-\alpha_p)^{m_p}(X^2+\beta_1X+\gamma_1)^{n_1}(X^2+\beta_2X+\gamma_2)^{n_2}\dots(X^2+\beta_qX+\gamma_q)^{n_q}$ avec λ un nombre réel et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ et $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q$ des nombres réels avec $\beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$ pour tout $k \in [\![1, q]\!]$.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 16. *Décomposer le polynôme $X^3 + X^2 + X + 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathrm{R}[X]$.*

5 Polynôme dérivé

Définition 10. *On appelle* **polynôme dérivé** *d'un polynôme* $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = \sum_{k=0}^{k=n} a_kX^k$ *le polynôme* $P'(X) = \begin{cases} 0 \ , \ si\ n = 0 \\ a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1} = \sum_{k=1}^{k=n} ka_kX^{k-1} \ , \ si\ n > 0 \end{cases}$.

Remarque 11. *On peut également définir par récurrence la dérivée k-ième d'un polynôme.*

Exercice 17. *Déterminer la dérivée k-ième de* X^n *pour* $k \in [\![0, n]\!]$.

Propriété 9. *On considère* $P \in \mathbb{K}[X]$ *alors* $\boxed{\deg(P') = \begin{cases} -\infty \ , \ si\ \deg(P) \leqslant 0 \\ \deg(P) - 1 \ , \ si\ \deg(P) > 0 \end{cases}}$.

Démonstration. Exigible. □

Théorème 3. Formule de Taylor en 0
On considère un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ *de degré* $n \in \mathbb{N}$ *alors :*

$$\boxed{P(X) = P(0) + P'(0)X + \frac{P''(0)}{2!}X^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}X^n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k}$$

Démonstration. Exigible - On montre que $P^{(k)}(0) = k!a_k$. □

Corollaire 6. Formule de Taylor en α
On considère un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ *de degré* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$ *alors :*

$$\boxed{P(X) = P(\alpha) + P'(\alpha)(X-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2!}(X-\alpha)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k}$$

Démonstration. Exigible - On applique la formule de Taylor au polynôme $Q(X) = P(X + \alpha)$. □

Corollaire 7. *On considère un polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$ *non nul alors* $\alpha \in \mathbb{K}$ *est une racine d'ordre* m *de* P *si et seulement si* $P(\alpha), P'(\alpha), \ldots, P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ *et* $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Démonstration. Exigible - Pour le sens direct, on montre que $P^{(k)}(X) = (X-\alpha)^{m-k}Q_k(X)$ avec $Q_k(\alpha) \neq 0$; pour la réciproque, on utilise la formule de Taylor en la racine α. □

Exercice 18. *Montrer que* 1 *est une racine du polynôme* $X^4 - X^3 - X + 1$ *et déterminer son ordre de multiplicité.*

Théorème 4. Formule de Leibniz
On considère deux polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *alors :*

$$\boxed{(P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} P^{(k)}Q^{(n-k)}}$$

Démonstration. Exigible - On procède par récurrence sur n. □

Exercice 19. *Exprimer la dérivée* 3*-ième de* $P(X)Q(X)$ *puis de* $X^3P(X)$ *à l'aide de la formule de Leibniz.*