VII. Ensembles de nombres

1 Ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels

Axiome 1.
- *toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*
- *toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.*

Exercice 1.
- *Montrer que l'ensemble $E = \left\{n \in \mathbb{N} / |\sin n| < \dfrac{n}{100}\right\}$ admet un plus petit élément.*
- *Montrer que l'ensemble $F = \{n \in \mathbb{N}/2^n < n^3\}$ admet un plus grand élément.*

Théorème 1. Principe de récurrence
On considère une propriété P_n dépendant d'un nombre entier naturel n telle que :
- *P_0 est vraie (**initialisation**)*
- *si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie (**hérédité**)*

alors la propriété P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Non exigible - On considère l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N}/P_n \text{ fausse}\}$ et on suppose que $E \neq \varnothing$, il admet un plus petit élément $n_0 \neq 0$ et on s'intéresse à P_{n_0-1}. ☐

Remarque 1. *Dans le cas ou l'initialisation a lieu pour $n = n_0$, la propriété sera vraie pour tout $n \geqslant n_0$.*

Exemple 1. *Montrons que $4^n + 2$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
On considère la propriété $(P_n) : 4^n + 2$ est un multiple de 3.
- ***initialisation** : $4^0 + 2 = 3$ est un multiple de 3 donc la propriété P_n est vraie au rang $n = 0$.*
- ***hérédité** : supposons qu'il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n soit vraie, on a alors $4^n + 2 = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$ d'où $4^n = 3k - 2$, $4^{n+1} = 12k - 8$ et $4^{n+1} + 2 = 12k - 6 = 3(4k - 2)$ donc P_{n+1} est vraie.*
- ***conclusion** : d'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 2. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on a $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$.*

Exercice 3. *Montrer que la propriété « $8^n + 1$ est un multiple de 7 » est héréditaire, que peut-on en déduire ?*

Corollaire 1. Suite définie par récurrence
On considère une fonction f réelle ou complexe et un nombre a réel ou complexe, il existe une unique suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & a \\ u_{n+1} & = & f(u_n)\ ,\ n \geqslant 0 \end{array}\right.$.

Démonstration. Non exigible - On suppose qu'il existe deux suites distinctes $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et on considère l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N}/u_n \neq v_n\}$. ☐

Exercice 4. *Démontrer que la suite $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & 2u_n + 1\ ,\ n \geqslant 0 \end{array}\right.$ définie par récurrence admet pour forme explicite $u_n = 2^n - 1\ ,\ n \geqslant 0$.*

Remarque 2. *On peut également définir une suite par récurrence sur les deux termes précédents en donnant u_0 et u_1 en condition initiale.*

Corollaire 2. Principe de récurrence avec prédécesseurs
On considère une propriété P_n dépendant d'un nombre entier naturel n telle que :
- *P_0 est vraie (**initialisation**)*
- *si P_0 et P_1 et ... et P_n sont vraies alors P_{n+1} vraie (**hérédité forte**)*

alors la propriété P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Non exigible - On considère la propriété Q_n : P_0 et P_2 et ... et P_n. □

Exercice 5. *Démontrer que la suite* $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 2 \\ u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \ , \ n \geqslant 0 \end{cases}$ *définie par récurrence admet pour forme explicite* $u_n = 2^n \ , \ n \geqslant 0$.

Définition 1. Symbole somme
Étant donnés un entier naturel n non nul et n nombres $a_1, \ a_2, \ \ldots \ , a_n$ réels ou complexes, on note :

$$\boxed{\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k = \sum_{k=1}^{k=n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

Remarque 3. *On a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} a = na$ *pour a un nombre réel ou complexe et $n \in \mathbb{N}^*$.*

Propriété 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors* $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 6. *Démontrer que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ *pour $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 2. Symbole produit
Étant donnés un entier naturel n non nul et n nombres $a_1, \ a_2, \ \ldots \ , a_n$ réels ou complexes, on note :

$$\boxed{\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k = \prod_{k=1}^{k=n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n}$$

Remarque 4. *On a* $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} a = a^n$ *pour a un nombre réel ou complexe et $n \in \mathbb{N}^*$.*

Définition 3. Symbole factorielle
Étant donné un entier naturel n on définit sa **factorielle** *$n!$ par :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} 0! &=& 1 \\ n! &=& \displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n \ , \ n > 0 \end{array}}$$

Exercice 7. *Calculer* $\dfrac{6!}{(3!)^2}$.

Définition 4. *Étant donné un nombre r réel ou complexe, on appelle* **suite arithmétique** *de* **raison** *r une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$, $n \in \mathbb{N}$.*

Exemple 2. *La suite des entiers pairs et la suite des entiers impairs sont arithmétiques de raison 2.*

Propriété 2. *On considère une suite arithmétique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de raison r et $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant q$, alors :*

$$u_q = u_p + (q-p)r \qquad \sum_{k=p}^{k=q} u_k = (q-p+1)\frac{u_p + u_q}{2}$$

Démonstration. Exigible. □

Exercice 8. *Calculer la somme des n premiers entiers impairs.*

Définition 5. *Étant donné un nombre r réel ou complexe, on appelle* **suite géométrique** *de* **raison** *r une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n \times r$, $n \in \mathbb{N}$.*

Exemple 3. *La suite des puissances de deux est géométrique.*

Propriété 3. *On considère une suite géométrique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de raison r et $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant q$, alors :*

$$u_q = u_p \times r^{q-p} \qquad \sum_{k=p}^{k=q} u_k = \frac{u_p - r \times u_q}{1-r} \text{ si } r \neq 1$$

Démonstration. Exigible. □

Exercice 9. *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 2^k$.

2 Ensembles finis

2.1 Définition d'un ensemble fini

Définition 6. Image directe et image réciproque
Étant donnés une application $f : E \to F$, $A \subset E$ et $B \subset F$, on appelle **image directe** *de A par f et on note $f(A)$ l'ensemble des images par f des éléments de A et on appelle* **image réciproque** *de B par f et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble des antécédents par f des éléments de B :*

$$\boxed{f(A) = \{f(x)/x \in A\}} \qquad \boxed{f^{-1}(B) = \{x/f(x) \in B\}}$$

Remarque 5. *On a $f(A) \subset F$ et $f^{-1}(B) \subset E$.*

Exercice 10. *On considère* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, *déterminer $f([-1;1])$ et $f^{-1}([1,2])$.*

Définition 7. *Une application $f : E \to F$ est dite* **injective** *si tout élément de F admet au plus un antécédent par f,* **surjective** *si tout élément de F admet au moins un antécédent par f et* **bijective** *si tout élément de F admet exactement un antécédent par f.*

Remarque 6. *Une application est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.*

Remarque 7. *Une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$.*

Remarque 8. *Si $f : E \to F$ est injective alors* $g : \begin{array}{ccc} E & \to & f(E) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ *est bijective.*

Exemple 4. *On considère* $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ *et* $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ *:* f_1 *est une injection,* f_2 *est une surjection et* f_3 *est une bijection.*

Exercice 11. *Montrer que* $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ *est injective.*

Définition 8. *Étant donnés* $p, q \in \mathbb{N}$ *avec* $p \leqslant q$*, on note* $\boxed{[\![p, q]\!] = \{n \in \mathbb{N} / p \leqslant n \leqslant q\}}$.

Définition 9. *Un ensemble* E *est dit fini s'il est vide ou s'il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *et une bijection de* $[\![1, n]\!]$ *sur* E*, le nombre* n *est alors unique et appelé* **cardinal** *ou* **nombre d'éléments** *de l'ensemble* E *noté* $\mathrm{Card}(E)$*, on convient que* $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$.

Remarque 9. *La bijection de la définition correspond à l'idée intuitive de numérotation.*

Exercice 12. *Montrer que l'ensemble* $E = [\![5, 10]\!]$ *est fini et déterminer son cardinal.*

Propriété 4. *On considère deux ensembles* E *et* F *avec* $E \subset F$*, si* F *est un ensemble fini alors* E *est un ensemble fini et* $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$ *avec* $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ *si et seulement si* $E = F$.

Démonstration. Hors programme. □

Propriété 5. *On considère deux ensembles finis* E *et* F *ainsi qu'une bijection* $f : E \to F$ *alors* $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Démonstration. Hors programme. □

Propriété 6. *On considère deux ensembles finis* E *et* F *avec* $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ *ainsi qu'une application* $f : E \to F$ *alors les propositions suivantes sont équivalentes :*
- f *est injective*
- f *est surjective*
- f *est bijective*

Démonstration. Hors programme. □

Contre-exemple 1. *L'application* $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2 \end{array}$ *est injective mais pas surjective.*

2.2 Dénombrements

Propriété 7. *On considère deux ensembles finis* E *et* F *alors* $E \cup F$ *et* $E \cap F$ *sont des ensembles finis et* $\boxed{\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)}$.

Démonstration. Hors programme. □

Exercice 13. *Vérifier la formule avec* $E = [\![2, 5]\!]$ *et* $F = [\![3, 7]\!]$.

Propriété 8. *On considère deux ensembles finis* E *et* F *alors* $E \times F = \{(x; y) / x \in E, y \in F\}$ *est un ensemble fini et* $\boxed{\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)}$.

Démonstration. Hors programme. □

Exercice 14. *Déterminer les éléments de* $[\![1, 2]\!] \times [\![1, 3]\!]$.

Propriété 9. *On considère deux ensembles finis* E *et* F *alors l'ensemble* $\mathcal{F}(E, F)$ *des applications de* E *dans* F *est un ensemble fini et* $\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}}$.

Démonstration. Hors programme. □

Exercice 15. *Déterminer les éléments de* $\mathcal{F}([\![1,2]\!],[\![1,3]\!])$.

Exercice 16. *Déterminer les injections de* $[\![1,2]\!]$ *dans* $[\![1,3]\!]$.

Propriété 10. *On considère un ensemble fini E de cardinal n, l'ensemble des bijections de E dans E appelées également* **permutations** *est de cardinal $n!$.*

Démonstration. Hors programme. □

Exercice 17. *Déterminer les permutations de* $[\![1,3]\!]$.

Propriété 11. *On considère un ensemble fini E, alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est un ensemble fini et* $\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}}$.

Démonstration. Hors programme. □

Exercice 18. *Déterminer* $\mathcal{P}([\![1,3]\!])$.

Propriété 12. *On considère un ensemble fini E de cardinal $n \neq 0$ et $p \in [\![0,n]\!]$, alors l'ensemble des parties de E ayant p éléments est un ensemble fini de cardinal* $\boxed{\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$.

Démonstration. Hors programme. □

Remarque 10. *Le symbole de la définition se lit « p parmi n », il est parfois appelé* **combinaison** *et noté* C_n^p.

Exercice 19. *Déterminer les parties de $[\![1,4]\!]$ ayant 2 éléments.*

Propriété 13. *On considère $n \in \mathbb{N}^*$, alors :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \binom{n}{p} & = & \binom{n}{n-p} \ , \ p \in [\![0,n]\!] \\ \binom{n}{p} & = & \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \ , \ p \in [\![1,n-1]\!] \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} & = & 2^n \end{array}}$$

Démonstration. Exigible - On construit une bijection entre l'ensemble des parties de E ayant p éléments et l'ensemble des parties de E ayant $n-p$ éléments, on partage l'ensemble des parties de E ayant p éléments entre celles possédant ou ne possédant pas un élément donné. On remarque que l'ensemble des parties de E peut être partitionné en utilisant les ensembles des parties de E ayant p éléments. □

Exercice 20. *Construire le* **triangle de Pascal** *obtenu en plaçant les $\binom{n}{p}$ dans un tableau où n représente le numéro de ligne et p le numéro de colonne. Illustrer sur ce tableau les résultats de la propriété précédente.*

3 Ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs

Définition 10. *On appelle* **loi interne** $*$ *sur un ensemble E une application* $\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x;y) & \mapsto & x * y \end{array}$.

Exemple 5.

- *L'addition $+$ et la multiplication $\times$ sont des lois internes sur $\mathbb{N}$.*
- *La soustraction $-$ n'est pas une loi interne sur $\mathbb{N}$: $1-2=-1 \notin \mathbb{N}$.*
- *La soustraction $-$ est une loi interne sur $\mathbb{Z}$.*

Définition 11. *Une loi interne* $*$ *sur un ensemble* E *est dites* **associative** *si pour tous éléments* x, y *et* z *de* E *on a* $(x * y) * z = x * (y * z)$, *on peut alors écrire* $x * y * z$.

Exemple 6.
- *L'addition* $+$ *et la multiplication* $\times$ *sont des lois internes associatives sur* $\mathbb{N}$.
- *La soustraction* $-$ *n'est pas une loi interne associative sur* $\mathbb{Z}$: $(1-2)-3 \neq 1-(2-3)$.

Définition 12. *On considère un ensemble* E *muni d'une loi interne* $*$, *on dit que* $e \in E$ *est un* **élément neutre** *de* E *pour la loi* $*$ *si pour tout* x *de* E *on a* $e * x = x * e = x$.

Remarque 11. *Un élément neutre est nécessairement unique :* $e_1 * e_2 = e_1 = e_2$.

Exemple 7. $(\mathbb{N}, +)$ *admet* 0 *pour élément neutre,* $(\mathbb{N}, \times)$ *admet* 1 *pour élément neutre.*

Définition 13. *On considère un ensemble* E *muni d'une loi interne* $*$ *et admettant un élément neutre* e, *on dit que* $x' \in E$ *est un* **élément symétrique** *de* $x \in \mathbb{E}$ *pour la loi* $*$ *si* $x * x' = x' * x = e$.

Remarque 12. *L'élément neutre est son propre élément symétrique.*

Remarque 13. *Si la loi est associative, un élément symétrique de* x *est nécessairement unique :* $(x_1' * x) * x_2' = e * x_2' = x_2'$ *et* $x_1' * (x * x_2') = x_1' * e = x_1'$.

Exercice 21. *Montrer que les éléments de* $(\mathbb{Z}, +)$ *admettent un élément symétrique, quel nom donne-t-on à l'élément symétrique de* $x \in \mathbb{Z}$ *pour la loi* $+$ *?*

Déterminer les éléments de $(\mathbb{Z}, \times)$ *admettant un élément symétrique, quel nom donne-t-on dans ce cas à l'élément symétrique de* $x \in \mathbb{Z}$ *pour la loi* $\times$ *?*

Définition 14. *On appelle* **groupe** *un ensemble* E *muni d'une loi interne* $*$ *associative possédant un élément neutre pour laquelle tout élément de* E *admet un élément symétrique.*

Exemple 8. $(\mathbb{Z}, +)$ *est un groupe,* $(\mathbb{Z}, \times)$ *n'est pas un groupe.*

Définition 15. *On considère* $a, b \in \mathbb{Z}$. *S'il existe* $c \in \mathbb{Z}$ *tel que* $a = b \times c$ *on dit que* a *est un* **multiple** *de* b *et que* b *est un* **diviseur** *de* a.

Exercice 22. *Déterminer les diviseurs de* 12.

Propriété 14. Division euclidienne
On considère $a \in \mathbb{N}$ *et* $b \in \mathbb{N}^*$ *alors il existe un unique couple* $(q, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *tel que* $a = bq + r$ *et* $r < b$, q *et* r *sont respectivement appelés* **quotient** *et* **reste** *de la* **division euclidienne** *de* a *par* b.

Démonstration. Hors programme. □

Remarque 14. *Le reste de la division euclidienne de* a *par* b *est nul si et seulement si* b *divise* a.

Exercice 23. *Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de* 100 *par* 7.

Définition 16. *Un nombre* $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ *est dit* **premier** *si ses seuls diviseurs positifs sont* 1 *et* p.

Exercice 24. *Déterminer les nombres premiers inférieurs à* 100 *au moyen du* **crible d'Ératosthène**.

Théorème 2. Théorème fondamental de l'arithmétique
Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 *se décompose de manière unique en produit de nombres premiers à l'ordre des facteurs près.*

Démonstration. Hors programme. □

Exercice 25. *Déterminer les décompositions en produits de facteurs premiers de* 340 *et* 855.

4 Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ des nombres réels et complexes

On remarque que $(\mathbb{Z},+)$ est un groupe mais $(\mathbb{Z},\times)$ n'en est pas un, car seuls 1 et -1 admettent un élément symétrique dans $\mathbb{Z}$ pour la loi $\times$, on est donc amenés à considérer l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et alors $(\mathbb{Q}^*,\times)$ est un groupe.

On remarque que $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{Q}^*,\times)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{C},+)$ et $(\mathbb{C}^*,\times)$ sont des groupes, en fait $(\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$ et $(\mathbb{C},+,\times)$ ont des structures algébriques semblables et sont appelés ***corps***.

Définition 17. *On considère un groupe $(G,*)$, on dit que $(H,*)$ est un* **sous-groupe** *de $(G,*)$ si $(H,*)$ est un groupe et $H\subset G$.*

Propriété 15. *On considère un groupe $(G,*)$ alors $(H,*)$ est un* **sous-groupe** *de $(G,*)$ si et seulement si $H\subset G$ et :*

- *H contient l'élément neutre de G,*
- *H est stable pour la loi $*$,*
  (si $x,y\in H$ alors $x*y\in H$)
- *H est stable par passage à l'élément symétrique.*
  (si $x\in H$ alors son élément symétrique x' pour la loi $*$ appartient à H)

Démonstration. Exigible. □

Exercice 26. *Montrer que $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.*

Définition 18. *On considère deux groupes $(G,\ltimes)$ et $(G',\rtimes)$, on dit qu'une application $f:G\to G'$ est un* **morphisme de groupes** *si pour tous $x,y\in G$ alors $f(x\ltimes y)=f(x)\rtimes f(y)$.*

Exemple 9. *Le module est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}^*,\times)$ dans $(\mathbb{R}^*,\times)$, l'exponentielle est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R}^*,\times)$.*

Propriété 16. Formule du binôme
On considère x et y deux nombres entiers, rationnels, réels ou complexes et $n\in\mathbb{N}^*$ alors :

$$\boxed{(x+y)^n=\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k}$$

Démonstration. Exigible - On procède par récurrence sur n. □

Exercice 27. *Développer $(x+y)^3$, $(1+x)^4$ et $(x-y)^5$ en utilisant la formule du binôme.*

Propriété 17. *On considère x et y deux nombres entiers, rationnels, réels ou complexes et $n\in\mathbb{N}^*$ alors :*

$$\boxed{x^n-y^n=(x-y)\sum_{k=0}^{k=n-1}x^{n-1-k}y^k}$$

Démonstration. Exigible - On développe le produit et on simplifie par télescopage. □

Exercice 28. *Factoriser x^3-y^3.*

Exercice 29. *Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}x^k$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\neq 1$.*