Réponses du devoir libre de Mathématiques n°3

Exercice 1

1. En remarquant que $y'(-t) = y(t) - t^2$, on montre que y est solution de l'équation différentielle $y'' + y = t^2 - 2t$.
   On a donc $y(t) = t^2 - 2t - 2 + \lambda \cos t + \mu \sin t$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme $y(t) = t^2 - 2t - 2 + \lambda(\cos t + \sin t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

1. (a) On montre que $\mathcal{R}e(z') = \dfrac{|z|^2 - 1}{|z-1|^2}$ d'où $\mathcal{R}e(z') = 0$ si $|z| = 1$.
   (b) On montre que le nombre complexe $z = \dfrac{iy+1}{iy-1}$ de module 1 et différent de 1 vérifie l'égalité $\dfrac{z+1}{z-1} = iy$.
2. On montre que $|z'|^2 = 1 + \dfrac{4\mathcal{R}e(z)}{|z-1|^2}$ d'où $|z'| = 1$ si $\mathcal{R}e(z) = 0$ et donc $h(\mathcal{D}) \subset \mathcal{C}$.

   On montre que le nombre complexe $z = \dfrac{z'+1}{z'-1}$ vérifie l'égalité $\dfrac{z+1}{z-1} = z'$ d'où $\mathcal{R}e(z) = 0$ si $|z'| = 1$ et donc $\mathcal{C} \subset h(\mathcal{D})$.
3. On a $h(\mathcal{C}_+) = \mathcal{D}_+$, $h(\mathcal{C}_-) = \mathcal{D}_-$, $h(\mathcal{D}_+) = \mathcal{C}_+$ et $h(\mathcal{D}_-) = \mathcal{C}_-$.