III. Géométrie du plan

Exercice 1

Le plan étant muni d'une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ obtenue par rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$ de cette dernière. Déterminer les formules de changement de repère donnant les coordonnées $(x'; y')$ d'un vecteur dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ en fonction de ses coordonnées $(x; y)$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exercice 2

Dans le plan complexe, on considère un vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $3 - 2i$. Déterminer l'affixe de l'image de ce vecteur par la rotation d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, déterminer les coordonnées polaires du point M de coordonnées $(\sqrt{3} - 2; 3 - 2\sqrt{3})$.

Exercice 4

On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan. Exprimer $||\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2$ en fonction de $||2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}||^2$ et $||3\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}||^2$.

Exercice 5

Dans le plan, on considère un segment $[AB]$ de milieu I. Montrer que pour tout point M on a $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{1}{2}AB^2$. En déduire le lieu géométrique formé par les points M vérifiant $MA^2 + MB^2 = AB^2$.

Exercice 6

Dans le plan, on considère un segment $[AB]$. En utilisant le point $G = \text{bar}\{(A; 1), (B; 2)\}$, déterminer le lieu géométrique formé par les points M vérifiant $MA^2 + 2MB^2 = AB^2$.

Exercice 7

Dans le plan, on considère un segment $[AB]$ de milieu I. Montrer que pour tout point M on a $\overrightarrow{MA} \,.\, \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2$. En déduire le lieu géométrique formé par les points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \,.\, \overrightarrow{MB} = \dfrac{3}{4}AB^2$.

Exercice 8

Démontrer que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \text{Det}(\overrightarrow{u}, r_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{v}))$ et $\text{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = r_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v}$.

Exercice 9

Dans le plan complexe, calculer l'aire du triangle dont les sommets ont pour affixes $i - 2$, $1 - i$ et $5 + 2i$.

Exercice 10

Dans le plan muni d'une base orthonormale directe, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1+2\sqrt{3}\\2-\sqrt{3}\end{pmatrix}$. Déterminer la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

Exercice 11

On considère un triangle ABC tel que $BC=4$, $\widehat{ABC}=\dfrac{\pi}{4}$ et $\widehat{ACB}=\dfrac{\pi}{3}$. Calculer les longueurs AB et AC.

Exercice 12

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point $A(2;-1)$ et perpendiculaire à la droite d'équation $3x-2y+5=0$.

Exercice 13

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer un paramétrage de la droite passant par le point $A(-1;3)$ et admettant $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

Exercice 14

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(3;4)$, $B(1;2)$ et $C(5;1)$. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC ainsi que les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 15

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer la distance du point $A(2;1)$ à la droite $\mathcal{D}$ d'équation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 3 & + & 3t \\ y & = & -1 & + & 2t \end{array}\right.$.

Exercice 16

Dans le plan, on considère un segment $[AB]$. Déterminer le lieu géométrique formé par les points M vérifiant $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{AB}=AB^2$.

Exercice 17

Dans le plan, on considère un segment $[AB]$. Déterminer le lieu géométrique formé par les points M vérifiant $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})=AB^2$.

Exercice 18

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(3;1)$ et $B(-2;2)$. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre A passant par le point B.

Exercice 19

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(3;2)$, $B(-1;-2)$ et $\Omega(2;-1)$. Déterminer l'intersection de la droite (AB) avec le cercle de centre Ω et de rayon 2.

Exercice 20

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(3;1)$, $B(6;5)$ et $C(2;-2)$. Déterminer une équation cartésienne des tangentes au cercle de diamètre $[AB]$ passant par le point C.

Exercice 21

Déterminer les courbes d'équations polaires $\rho = \dfrac{1}{2\cos\theta - 3\sin\theta}$ et $\rho = 2\cos\theta - 3\sin\theta$.

Exercice 22

Dans le plan complexe, on considère le point Ω et le vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixes respectives $1+2i$ et $3-i$. On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Montrer que $r \circ t$ et $t \circ r$ sont des isométries directes et déterminer leurs éléments caractéristiques.

Exercice 23

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(-1;-3)$, $B(2;1)$ et $M(x;y)$. Déterminer en fonction de x et de y les coordonnées du projeté orthogonal du point M sur la droite (AB) puis celles du symétrique du point M par rapport à la droite (AB).

Exercice 24

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(-1;-3)$ et $B(2;1)$. Déterminer l'écriture complexe de la réflexion d'axe (AB) sachant qu'elle est de la forme $z' = a\,\overline{z} + b$ avec a et b des nombres complexes et $|a| = 1$.

Exercice 25

On considère un segment $[AB]$ du plan. Montrer qu'il existe une unique homothétie de rapport -2 qui transforme A en B et déterminer son centre.

Exercice 26

Dans le plan complexe, on considère les points M, N, M' et N' d'affixes respectives $6+i$, $-3-2i$, $-2-i$ et $4+i$. Montrer qu'il existe une unique homothétie transformant M en M' et N en N' et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 27

Dans le plan complexe, on considère les points A et B d'affixes respectives $1+2i$ et $3-i$. On appelle h l'homothétie de centre A et de rapport -2 et r la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que $h \circ r$ et $r \circ h$ sont des similitudes directes et déterminer leurs éléments caractéristiques.

Exercice 28

On considère quatre points M, N, M' et N' du plan complexe avec $M \neq N$ et $M' \neq N'$, on note m, n, m' et n' leurs affixes respectives. Montrer en utilisant l'écriture complexe qu'il existe une unique similitude directe transformant M en M' et N en N'.

Problème 1 (Formule de Héron)

On considère un triangle, on appelle a, b et c les longueurs de ses côtés et γ la mesure de l'angle opposé au côté de longueur c. Exprimer $\cos\gamma$ en fonction de a, b et c. En déduire $(\sin\gamma)^2$ sous forme factorisée. Exprimer l'aire du triangle en fonction de a, b et c.

Problème 2 (Loi des tangentes)

On considère un triangle, on appelle a, b et c les longueurs de ses côtés et α, β et γ les mesures des angles respectivement opposés aux côtés de longueurs a, b et c.

Démontrer que $\dfrac{\frac{a-b}{2}}{\frac{a+b}{2}} = \dfrac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

Problème 3 (Équation complexe d'une droite et d'un cercle du plan)

Démontrer que toute droite du plan admet une équation complexe de la forme $m\,z+\overline{m}\,\overline{z}+p=0$ avec $m\in\mathbb{C}^*$ et $p\in\mathbb{R}$.

Démontrer que tout cercle du plan admet une équation complexe de la forme $z\,\overline{z}+m\,z+\overline{m}\,\overline{z}+p=0$ avec $m\in\mathbb{C}$ et $p\in\mathbb{R}$.

Problème 4 (Coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit)

On considère un triangle ABC du plan et on appelle I, J et K les pieds des bissectrices issues respectivement de A, B et C. Montrer que $\dfrac{IB}{IC}=\dfrac{AB}{AC}$. En déduire les coefficients du point I en tant que barycentre des points B et C. Montrer que $\Omega = \mathrm{bar}\{(A;BC),(B;AC),(C;AB)\}$ est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

Problème 5 (Inversion du plan)

On considère l'application définie sur le plan complexe privé de O par l'écriture complexe $z'=\dfrac{1}{\overline{z}}$. Déterminer l'image par cette application des droites et cercles du plan.

Problème 6 (Écriture complexe d'une réflexion)

Dans le plan complexe, déterminer l'écriture complexe d'une réflexion d'axe passant par un point Ω et d'angle α avec l'axe des abscisses. On notera $z-z_\Omega=re^{i\theta}$, $z'-z_\Omega=re^{i\theta'}$ et on remarquera que $\arg\left(\dfrac{z+z'}{2}-z_\Omega\right)=\alpha[\pi]$.

Problème 7 (Écriture complexe d'une similitude indirecte)

Déterminer l'écriture complexe d'une similitude indirecte. On appelera b et $a+b$ les affixes des images par la similitude directe des points d'affixes 0 et 1.

Réponses

Exercices

1) On a $\overrightarrow{i} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{u} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{j} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{v}$ d'où $x' = \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{3} - y\right)$ et $y' = \dfrac{1}{2}\left(x + y\sqrt{3}\right)$.

2) On a $z_{r_{-\frac{2\pi}{3}}(\overrightarrow{u})} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}(3-2i) = \left(-\dfrac{3}{2} - \sqrt{3}\right) + \left(1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$.

3) Les coordonnées polaires du point M sont $\rho = 4 - 2\sqrt{3}$ et $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

4) On a $||\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 = \dfrac{||2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}||^2 - ||3\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}||^2}{5}$.

5) On utilise la relation $MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$, le lieu géométrique cherché est le cercle de diamètre $[AB]$.

6) On a $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + \dfrac{2}{3}AB^2$, on en déduit que le lieu géométrique cherché est le cercle de centre G passant par B.

7) On utilise la relation $\overrightarrow{MA}\ .\ \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})\ .\ (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$, le lieu géométrique cherché est le cercle de centre I et de rayon AB.

8) On s'intéresse aux angles orientés $(\overrightarrow{u}, r_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{v}))$ et $(r_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{v})$.

9) On utilise la formule du déterminant en complexes et on obtient $\dfrac{17}{2}$.

10) On a $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

11) En utilisant la loi des sinus, on obtient $AB = 2\sqrt{2}\ (3 - \sqrt{3})$ et $AC = 4\ (\sqrt{3} - 1)$.

12) La droite admet pour équation cartésienne $2x + 3y - 1 = 0$.

13) Un paramétrage de la droite est $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -1 & - & t \\ y & = & 3 & + & 2t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

14) On montre que la hauteur issue de B admet pour équation cartésienne $2x - 3y + 4 = 0$ et que la hauteur issue de C admet pour équation cartésienne $x + y - 6 = 0$, on en déduit que les coordonnées de l'orthocentre sont $\left(\dfrac{14}{5}; \dfrac{16}{5}\right)$. On montre que la médiatrice du segment $[AB]$ admet pour équation cartésienne $x + y - 5 = 0$ et que la médiatrice du segment $[AC]$ admet pour équation cartésienne $4x - 6y - 1 = 0$, on en déduit que les coordonnées du centre du cercle circonscrit sont $\left(\dfrac{31}{10}; \dfrac{19}{10}\right)$.

15) La distance est $\dfrac{8}{\sqrt{13}}$.

16) En utilisant le point H projeté orthogonal du point M sur la droite (AB), on montre que le lieu géométrique cherché est la perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point B.

17) En utilisant le point H projeté orthogonal du point M sur la droite (AB), on montre que le lieu géométrique cherché est la parallèle à la droite (AB) passant par le point B' image de B par la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

18) Le cercle admet pour équation cartésienne $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 26$.

19) La droite (AB) d'équation cartésienne $x - y - 1 = 0$ et le cercle de centre Ω et de rayon 2 d'équation cartésienne $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ admettent deux points d'intersection ayant pour coordonnées $(2;1)$ et $(0;-1)$.

20) On appelle I le milieu du segment $[AB]$, les cercles de diamètres $[AB]$ et $[CI]$ admettent deux points d'intersection $M(6;1)$ et $N(2;3)$. Les tangentes cherchées sont les droites (CM) et (CN) admettant pour équations cartésiennes $3x - 4y - 14 = 0$ et $x - 2 = 0$.

21) Les courbes cherchées sont la droite d'équation cartésienne $2x - 3y - 1 = 0$ et le cercle de centre ayant pour coordonnées $\left(1; -\dfrac{3}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

22) La transformation $r\circ t$ a pour écriture complexe $z' = iz+4+4i$, c'est donc une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de centre le point d'affixe $4i$. La transformation $t\circ r$ a pour écriture complexe $z' = iz+6$, c'est donc une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de centre le point d'affixe $3+3i$.

23) La projection orthogonale sur la droite (AB) a pour expression analytique $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \dfrac{9}{25}x+\dfrac{12}{25}y+\dfrac{4}{5} \\ y' & = & \dfrac{12}{25}x+\dfrac{16}{25}y-\dfrac{3}{5} \end{array}\right.$

et la réflexion d'axe (AB) a pour expression analytique $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -\dfrac{7}{25}x+\dfrac{24}{25}y+\dfrac{8}{5} \\ y' & = & \dfrac{24}{25}x+\dfrac{7}{25}y-\dfrac{6}{5} \end{array}\right.$.

24) La réflexion d'axe (AB) a pour écriture complexe $z' = \dfrac{-7+24i}{25}\,\overline{z}+\dfrac{8-6i}{5}$.

25) Le centre de l'homothétie cherchée est le point $\Omega = \mathrm{bar}\{(A;2),(B;1)\}$.

26) L'homothétie cherchée a pour écriture complexe $z' = -\dfrac{2}{3}z+2-\dfrac{i}{3}$, son rapport est $-\dfrac{2}{3}$ et son centre a pour affixe $\dfrac{6-i}{5}$.

27) La transformation $h\circ r$ a pour écriture complexe $z' = -2iz-1+14i$, c'est donc une similitude directe de rapport 2, d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre le point d'affixe $\dfrac{27+16i}{5}$. La transformation $r\circ h$ a pour écriture complexe $z' = -2iz-4-i$, c'est donc une similitude directe de rapport 2, d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre le point d'affixe $\dfrac{-6+7i}{5}$.

28) La similitude directe cherchée a pour écriture complexe $z' = az+b$ avec $a = \dfrac{m'-n'}{m-n}$ et $b = \dfrac{mn'-m'n}{m-n}$.

Problèmes

1) L'aire du triangle est égale à $\dfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$.

2) On utilise la formule d'addition pour la fonction tangente et on se ramène à la loi des sinus.

3) On montre que $ax+by+c=0$ équivaut à $(a-ib)z+(a+ib)\overline{z}+2c=0$.
On montre que $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2 = R^2$ équivaut à $z\,\overline{z}-(x_\Omega-iy_\Omega)z-(x_\Omega+iy_\Omega)\overline{z}+{x_\Omega}^2+{y_\Omega}^2-R^2=0$.

4) On a $\dfrac{\mathrm{Aire}(ABI)}{\mathrm{Aire}(ACI)} = \dfrac{IB}{IC} = \dfrac{AB}{AC}$, on en déduit que $I = \mathrm{bar}\{(B;AC),(C;AB)\}$. On montre de même que $J = \mathrm{bar}\{(A;BC),(C;AB)\}$ et $K = \mathrm{bar}\{(A;BC),(B;AC)\}$. Le point Ω appartient aux droites (AI), (BJ) et (CJ), c'est donc le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

5) En utilisant les équations complexes d'une droite et d'un cercle du plan, on montre qu'une droite passant par O privée de O est globalement invariante, que l'image d'une droite ne passant pas par O est un cercle passant par O privé de O, que l'image d'un cercle passant par O privé de O est une droite ne passant pas par O et que l'image d'un cercle ne passant pas par O est un cercle ne passant pas par O.

6) On a $\arg\left(\dfrac{z+z'}{2}-z_\Omega\right) = \arg(z+z'-2z_\Omega) = \arg(e^{i\theta}+e^{i\theta'}) = \dfrac{\theta+\theta'}{2}$ en factorisant par $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$. On en tire $\theta' = 2\alpha-\theta$ d'où $z'-z_\Omega = e^{2i\alpha}(\overline{z}-\overline{z_\Omega})$.

7) On a $z_{\overrightarrow{O'M'}} = \overline{z}\times z_{\overrightarrow{O'I'}}$ d'où $z' = a\overline{z}+b$.