Correction du devoir surveillé de mathématiques n°1

Exercice 1

$$
\begin{array}{rcccl}
x^2-2x+3 & = & (x-1)^2-1+3 & = & (x-1)^2+2 \\
x^2+6x+7 & = & (x+3)^2-9+7 & = & (x-(-3))^2+(-2) \\
x^2+3x+1 & = & (x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+1 & = & (x-(-\frac{3}{2}))^2+(-\frac{5}{4}) \\
2x^2-10x+7 & = & 2[x^2-5x+\frac{7}{2}] & = & 2[(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}+\frac{7}{2}] \\
 & = & 2[(x-\frac{5}{2})^2-\frac{11}{4}] & = & 2(x-\frac{5}{2})^2+(-\frac{11}{2}) \\
3x^2+7x+2 & = & 3[x^2+\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}] & = & 3[(x+\frac{7}{6})^2-\frac{49}{36}+\frac{2}{3}] \\
 & = & 3[(x+\frac{7}{6})^2-\frac{25}{36}] & = & 3(x-(-\frac{7}{6}))^2+(-\frac{25}{12})
\end{array}
$$

Exercice 2

$$
\begin{array}{rcccl}
x^2+2x-3 & = & (x+1)^2-1-3 & = & (x+1)^2-(2)^2 \\
 & = & (x+1+2)(x+1-2) & = & (x+3)(x-1) \\
2x^2-2x-12 & = & 2[x^2-x-6] & = & 2[(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-6] \\
 & = & 2[(x-\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}] & = & 2[(x-\frac{1}{2})^2-(\frac{5}{2})^2] \\
 & = & 2(x-\frac{1}{2}+\frac{5}{2})(x-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}) & = & 2(x+2)(x-3) \\
3x^2-12x+12 & = & 3[x^2-4x+4] & = & 3(x-2)^2 \\
3x^2+11x-4 & = & 3[x^2+\frac{11}{3}x-\frac{4}{3}] & = & 3[(x+\frac{11}{6})^2-\frac{121}{36}-\frac{4}{3}] \\
 & = & 3[(x+\frac{11}{6})^2-\frac{169}{36}] & = & 3[(x+\frac{11}{6})^2-(\frac{13}{6})^2] \\
 & = & 3(x+\frac{11}{6}+\frac{13}{6})(x+\frac{11}{6}-\frac{13}{6}) & = & 3(x+4)(x-\frac{1}{3}) \\
20x^2-3x-2 & = & 20[x^2-\frac{3}{20}x-\frac{1}{10}] & = & 20[(x-\frac{3}{40})^2-\frac{9}{1600}-\frac{1}{10}] \\
 & = & 20[(x-\frac{3}{40})^2-\frac{169}{1600}] & = & 20[(x-\frac{3}{40})^2-(\frac{13}{40})^2] \\
 & = & 20(x-\frac{3}{40}+\frac{13}{40})(x-\frac{3}{40}-\frac{13}{40}) & = & 20(x+\frac{1}{4})(x-\frac{2}{5})
\end{array}
$$

Exercice 3

1. On calcule le discriminant du trinôme $x^2 + x - 2$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$$

Le trinome possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2 \times 1} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{-1-\sqrt{9}}{2 \times 1} = -2$$

L'équation $x^2 + x - 2 = 0$ admet pour ensemble solution $S = \{-2; 1\}$.

2. On calcule le discriminant du trinôme $2x^2 + 3x - 9$.

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-9) = 81$$

Le trinome possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{81}}{2 \times 2} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-3-\sqrt{81}}{2 \times 2} = -3$$

L'équation $2x^2 + 3x - 9 = 0$ admet pour ensemble solution $S = \{-3; \frac{3}{2}\}$.

3. Le trinôme $x^2 + x - 6$ admet pour racines 2 et -3, son signe est celui du coefficient de x^2 donc positif à l'extérieur des racines.

L'inéquation $x^2 + x - 6 \geqslant 0$ admet donc ensemble solution $S =]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[$.

4. On remarque tout d'abord que l'inéquation $x(2x + 5) < 3$ peut se mettre sous la forme $2x^2 + 5x - 3 < 0$. Le trinôme $2x^2 + 5x - 3$ admet pour racines $\frac{1}{2}$ et -3, son signe est contraire à celui du coefficient de x^2 donc négatif à l'intérieur des racines.

L'inéquation $x(2x + 5) < 3$ admet donc pour ensemble solution $S = \ ]-3; \frac{1}{2}[$.

Exercice 4

1. L'équation $y = -3x^2 - 12x - 16$ de la parabole peut se mettre sous la forme canonique :

$$y = -3(x - (-2))^2 + (-4)$$

Le sommet de la parabole d'équation $y = -3x^2 - 12x - 16$ a donc pour coordonnées :

$$S(-2; -4)$$

2. L'équation de la parabole est de la forme $y = a(x - 4)^2 + 3$. le point $P(5; 5)$ appartient à la parabole donc $5 = a(5 - 4)^2 + 3$ d'où $a = 2$.

L'équation de la parabole de sommet $S(4; 3)$ passant par le point $P(5; 5)$ est donc :

$$y = 2(x - 4)^2 + 3$$