Polynômes

Factorisation d'un polynôme à l'aide de racines évidentes

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

1. Vérifier que $x = 1$ est une racine évidente du polynôme P.
2. Développer le produit $(x - 1)(ax^2 + bx + c)$, déterminer les réels a, b et c pour que $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
3. Factoriser $P(x)$ sous la forme d'un produit de trois polynômes de degré 1.
4. En déduire les racines du polynôme P.

Après avoir trouvé une racine évidente, déterminer les racines de chacun des polynômes suivants selon la méthode précédente :

$$\begin{gathered} x^3 + x^2 - 56x \\ x^3 + x^2 + x - 3 \\ 4x^3 - 24x^2 + 45x - 25 \\ x^3 + 2x^2 - 29x - 30 \\ x^4 - 5x^3 - 24x^2 \\ x^4 - 6x^3 - 23x^2 + 132x - 140 \end{gathered}$$

Division euclidienne de polynômes

On considère les polynômes $P_1(x) = x - 1$ et $P_2(x) = x^2 + 9x - 5$. On cherche des polynômes Q et R vérifiant l'égalité $P_2(x) = P_1(x) \times Q(x) + R(x)$ avec R de degré inférieur à Q.

1. Quels doivent-être les degrés des polynômes Q et R ?
2. On pose $Q(x) = ax + b$ et $R(x) = c$, développer l'expression $(x - 1) \times Q(x) + R(x)$, en déduire les réel a, b, et c pour que $x^2 + 9x - 5 = (x - 1) \times Q(x) + R(x)$.
3. Donner les polynômes Q et R cherchés.

Les polynômes Q et R sont appelés polynômes *quotient* et *reste* de la *division euclidienne* du polynôme P_2 par le polynôme P_1. Trouver dans chaque cas le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme P_2 par le polynôme P_1 :

$$\begin{aligned} P_1(x) = x - 2 &\quad \text{et} \quad P_2(x) = x^2 - 3x + 4 \\ P_1(x) = x^2 - x + 2 &\quad \text{et} \quad P_2(x) = x^3 - 5x^2 - x + 7 \\ P_1(x) = x - 3 &\quad \text{et} \quad P_2(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5 \end{aligned}$$