Correction du devoir maison de mathématiques n°5

Exercice 1

1. La fonction f_1 est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$f_1'(x) = 3 \times (2x) - 1 = 6x - 1$$
2. La fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en raison de la présence de la fonction racine :
$$f_2'(x) = 3 + 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3 + \frac{5}{2\sqrt{x}}$$
3. La fonction f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en raison de la présence de la fonction inverse :
$$f_3'(x) = 2x - 2 \times \frac{-1}{x^2} = 2x + \frac{2}{x^2}$$
4. La fonction f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en raison de la présence de la fonction racine, on pose $u(x) = x - 2$ et $v(x) = \sqrt{x}$, alors :
$$f_4'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times \sqrt{x} + (x-2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x-2}{2\sqrt{x}}$$
5. La fonction f_5 est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ en raison d'une valeur interdite au dénominateur, on pose $u(x) = x^2 - 1$ et $v(x) = 2x + 1$, alors :
$$f_5'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{2x \times (2x+1) - (x^2-1) \times 2}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 2}{(2x+1)^2}$$
6. La fonction f_6 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en raison de la présence de la fonction racine, on pose $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 5x$, alors :
$$\begin{aligned} f_6'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times 5x - \sqrt{x} \times 5}{(5x)^2} = \frac{\frac{5x}{2\sqrt{x}} - 5\sqrt{x}}{25x^2} \\ &= \frac{\frac{5}{2}\sqrt{x} - 5\sqrt{x}}{25x^2} = \frac{-\frac{5}{2}\sqrt{x}}{25x^2} = \frac{-\sqrt{x}}{10x^2} \end{aligned}$$
En fait, en remarquant que $f_6(x) = \dfrac{1}{5\sqrt{x}}$, le calcul aurait pu se trouver simplifié...

Exercice 2

1. La fonction polynôme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 6x - 1$, l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1 est :
$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 5(x-1) + 3 = 5x - 2$$
2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$, l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 1 est :
$$y = g'(1)(x-1) + g(1) = -\frac{1}{2}(x-1) + 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Exercice 3

1. La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f_1'(x) = -2 - \dfrac{1}{x^2}$, le tableau de variations de la fonction f_1 est donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f_1(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

2. La fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_2'(x) = 2x - 2$, le tableau de variations de la fonction f_2 est donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_2(x)$		$\searrow$	4	$\nearrow$	

3. La fonction f_3 est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et $f_3'(x) = \dfrac{1 \times (x-1) - (x-2) \times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, le tableau de variations de la fonction f_3 est donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_3'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f_3(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

4. La fonction f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_4'(x) = 6x^2 - 6x - 12$, le trinôme $6x^2 - 6x - 12$ est positif à l'extérieur de ses racines qui sont -1 et 2 donc le tableau de variations de la fonction f_4 est :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f_4'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_4(x)$		$\nearrow$	8	$\searrow$	-19	$\nearrow$	

Exercice 4

1. La vitesse du camion étant constante, $t = \dfrac{\text{distance}}{\text{vitesse}} = \dfrac{200}{x}$.

2. Le coût en carburant est donc $(6 + \dfrac{x^2}{800}) \times t = (6 + \dfrac{x^2}{800}) \times \dfrac{200}{x} = \dfrac{1200}{x} + \dfrac{x}{4}$ et le coût du chauffeur est $10 \times t = 10 \times \dfrac{200}{x} = \dfrac{2000}{x}$.

3. Le coût total du trajet est donc $C(x) = \dfrac{1200}{x} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{2000}{x} = \dfrac{x}{4} + \dfrac{3200}{x}$.

4. La fonction C est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $C'(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3200}{x^2} = \dfrac{x^2 - 12800}{4x^2}$, les variations de la fonction C sur $[0; +\infty[$ sont donc :

x	0		$\sqrt{12800}$		$+\infty$
$C'(x)$		$-$	0	$+$	
$C(x)$		$\searrow$	$C(\sqrt{12800})$	$\nearrow$	

5. Pour que le coût total du trajet soit minimal, la vitesse du camion doit être de $\sqrt{12800} \simeq 113$km/h .