Correction du devoir maison de mathématiques n°4

Exercice 1

$$\begin{array}{rcccl}
x^2-4x+7 &=& (x-2)^2-4+7 &=& (x-2)^2+3\\
x^2-2x-6 &=& (x-1)^2-1-6 &=& (x-1)^2+(-7)\\
x^2+3x+2 &=& (x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+2 &=& (x-(-\frac{3}{2}))^2+(-\frac{1}{4})\\
2x^2-20x+59 &=& 2[x^2-10x+\frac{59}{2}] &=& 2[(x-5)^2-25+\frac{59}{2}]\\
&=& 2[(x-5)^2+\frac{9}{2}] &=& 2(x-5)^2+9\\
3x^2+4x+7 &=& 3[x^2+\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}] &=& 3[(x+\frac{2}{3})^2-\frac{4}{9}+\frac{7}{3}]\\
&=& 3[(x+\frac{2}{3})^2+\frac{17}{9}] &=& 3(x-(-\frac{2}{3}))^2+\frac{17}{3}
\end{array}$$

Exercice 2

Un trinôme du second degré ax^2+bx+c est factorisable si son discriminant Δ est positif ou nul :
- Si $\Delta=0$, le trinôme admet une racine x_0 et se factorise sous la forme $a(x-x_0)^2$.
- Si $\Delta>0$, le trinôme admet deux racines x_1, x_2 et se factorise sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$.

1). On calcule le discriminant du trinôme x^2+6x+9.

$$\Delta = 6^2-4\times 1\times 9=0$$

Le trinôme possède une racine :

$$x_0=\frac{-6}{2\times 1}=-3$$

Le trinôme $x^2+6x+9=0$ se factorise sous la forme $1\times(x-(-3))^2=(x+3)^2$.

2). On calcule le discriminant du trinôme x^2+x-2.

$$\Delta=1^2-4\times 1\times(-2)=9>0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1}=1 \quad\text{et}\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1}=-2$$

Le trinôme $x^2+x-6=0$ se factorise sous la forme $1\times(x-1)(x-(-2))=(x-1)(x+2)$.

3). On calcule le discriminant du trinôme $2x^2-10x+12$.

$$\Delta=(-10)^2-4\times 2\times 12=4>0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1=\frac{-(-10)+\sqrt{4}}{2\times 2}=3 \quad\text{et}\quad x_2=\frac{-(-10)-\sqrt{4}}{2\times 2}=2$$

Le trinôme $2x^2-10x+12=0$ se factorise sous la forme $2(x-3)(x-2)$.

4). On calcule le discriminant du trinôme $3x^2 + 13x + 4$.

$$\Delta = 13^2 - 4 \times 3 \times 4 = 121 > 0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-13 + \sqrt{121}}{2 \times 3} = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-13 - \sqrt{121}}{2 \times 3} = -4$$

Le trinôme $3x^2 + 13x + 4 = 0$ se factorise sous la forme $3 \times (x - (-\frac{1}{3}))(x - (-4)) = 3(x + \frac{1}{3})(x + 4)$.

Exercice 3

On considère un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ et son discriminant Δ :

- Si $\Delta < 0$, le trinôme ne s'annule pas et son signe est constant égal à celui de a.
- Si $\Delta = 0$, le trinôme s'annule en sa racine x_0 et son signe est celui de a.
- Si $\Delta > 0$, le trinôme s'annule en ses racines x_1, x_2 et son signe est celui de a à l'extérieur des racines et contraire à celui de a à l'intérieur des racines.

1). On calcule le discriminant du trinôme $f_1(x) = x^2 - x - 6$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = -2$$

Le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_1 est donc le suivant :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f_1(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2). On calcule le discriminant du trinôme $f_2(x) = x^2 + 2x + 8$.

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 8 = -28 < 0$$

Le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_2 est donc le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_2(x)$		$+$	

3). On calcule le discriminant du trinôme $f_3(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 64 > 0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{64}}{2 \times 2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{64}}{2 \times 2} = -3$$

Le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_3 est donc le suivant :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f_3(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4). On calcule le discriminant du trinôme $f_4(x) = -2x^2 - 5x + 3$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 49 > 0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times (-2)} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times (-2)} = \frac{1}{2}$$

Le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_4 est donc le suivant :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f_4(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 4

1). On calcule le discriminant du trinôme x^2+x-6.

$$\Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-6) = 25 > 0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\times 1} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times 1} = -3$$

L'équation $x^2+x-6=0$ admet pour ensemble solution $S=\{-3;2\}$.

2). On remarque tout d'abord que l'équation peut se mettre sous la forme :

$$2x^2+7x+6=0$$

On calcule ensuite le discriminant du trinôme $2x^2+7x+6$.

$$\Delta = 7^2 - 4\times 2\times 6 = 1 > 0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-7+\sqrt{1}}{2\times 2} = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-7-\sqrt{1}}{2\times 2} = -2$$

L'équation $2x^2+7x=-6$ admet pour ensemble solution $S=\{-2;-\frac{3}{2}\}$.

3). On calcule le discriminant du trinôme x^2+2x-3.

$$\Delta = 2^2 - 4\times 1\times(-3) = 16 > 0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1} = -3$$

Le trinôme est du signe de $a=1$ donc positif à l'extérieur des racines, l'inéquation $x^2+2x-3\geqslant 0$ admet pour ensemble solution $S=]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[$.

4). On remarque tout d'abord que l'équation peut se mettre sous la forme :

$$x^2+5x-14\leqslant 0$$

On calcule ensuite le discriminant du trinôme $x^2+5x-14$.

$$\Delta = 5^2 - 4\times - \times(-14) = 81 > 0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-5+\sqrt{81}}{2\times 1} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5-\sqrt{81}}{2\times 1} = -7$$

Le trinôme est du signe contraire de $a=1$ donc négatif à l'intérieur des racines, l'inéquation $x^2+5x\leqslant 14$ admet pour ensemble solution $S=[-7;2]$.

5). On calcule le discriminant du trinôme $2x^2-13x+7$.

$$\Delta = (-13)^2 - 4\times 2\times 7 = 113 > 0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-13)+\sqrt{113}}{2\times 2} = \frac{13+\sqrt{113}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-13)-\sqrt{113}}{2\times 2} = \frac{13-\sqrt{113}}{4}$$

Le trinôme est du signe contraire de $a=2$ donc négatif à l'intérieur des racines, l'inéquation $2x^2-13x+7\leqslant 0$ admet pour ensemble solution $S=[\frac{13-\sqrt{113}}{4};\frac{13+\sqrt{113}}{4}]$.

Exercice 5

1. On considère une feuille de papier de longueur L et de largeur l. Après l'avoir pliée en deux perpendiculairement à sa longueur, on obtient une nouvelle feuille dont la longueur est l et la largeur $\frac{L}{2}$. Le rapport longueur sur largeur devant rester le même, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{L}{l} &= \frac{l}{\frac{L}{2}} \\
\frac{L}{l} &= l \times \frac{2}{L} \\
\frac{L}{l} &= 2 \times \frac{l}{L} \\
\frac{L}{l} \times \frac{L}{l} &= 2 \\
\left(\frac{L}{l}\right)^2 &= 2 \\
\frac{L}{l} &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

2. L'aire de la feuille de papier est de $\frac{1}{16}m^2$ donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{L}{l} & = & \sqrt{2} \\ L \times l & = & \frac{1}{16} \end{array}\right.$$

   D'où par substitution :

$$\left\{\begin{array}{rcl} L & = & l\sqrt{2} \\ l\sqrt{2} \times l & = & \frac{1}{16} \end{array}\right.$$

   Et finalement :

$$\left\{\begin{array}{rcccl} l & = & \sqrt{\frac{1}{16\sqrt{2}}} & = & \frac{1}{4\sqrt{\sqrt{2}}} \\ L & = & \frac{1}{4\sqrt{\sqrt{2}}} \times \sqrt{2} & = & \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{4} \end{array}\right.$$

   Soit $l \simeq 21$cm et $L \simeq 29,7$cm.